解答例

STEP III 2000、第 3 問

純粋数学 • 複素数と図形

> **STEP III 2000、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.6 節「フェルマー点」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/fermat-point.html

鍵となる考え方

複素数平面（Argand plane）において、ベクトルを 60° 回転（rotation）させることは $\alpha = e^{i\pi/3}$ を掛けることにほかならない。したがって、与えられた辺の上に立てた正三角形（equilateral triangle）の第三の頂点は一行で書き下せる。その後はすべて、恒等式 $1 + \alpha^2 = \alpha$ と、$\alpha^3 = -1$ のようなその仲間から導かれる。これらによって頂点の式は非常に簡単な形にまとまり、その形が見えれば最後の小問はほぼ明らかである。

解答

恒等式

$\alpha^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから、

$$1 + \alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \alpha.$$

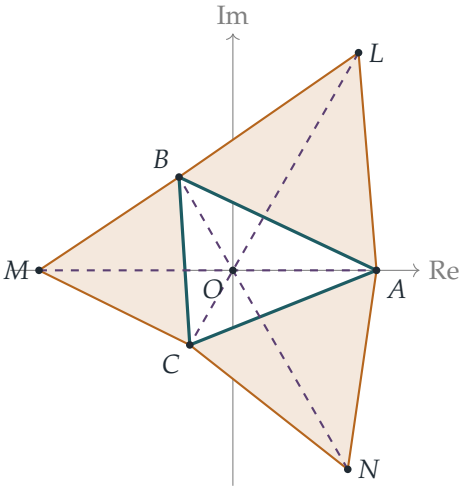
次の帰結もあわせて用いる。

- $\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$。
- $1 - \alpha = -\alpha^2$（恒等式を変形したもの）。
- $\alpha^2 - \alpha = -1$（これも変形したもの）。
- $\alpha + \bar{\alpha} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ より、$1 - \alpha = \bar{\alpha} = e^{-i\pi/3}$。

最後の式は、$1-\alpha$ を掛けると**時計回り**に 60° 回転することを意味している。

三角形 ABC

$A=p$ は正の実軸上にあり、$B=q\alpha^2=q\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$ は偏角 120° の半直線上に、$C=-r\alpha=r\,\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3}$ は偏角 240° の半直線上にある。つまり 3 つの頂点は、O から互いに 120° ずつ離れた 3 本の半直線上の、O からの距離 p,q,r の位置にある。原点は三角形の内部にあり、$A\to B\to C$ は**反時計回り**である。下の図は $p=2$、$q=1.5$、$r=1.2$ の場合で、外側に立てた三角形もあわせて描いてある。



頂点 N、L、M

XYZ が時計回りに名前をつけた正三角形であれば、X から回っていくと、辺 XZ は辺 XY を X を中心に時計回りに 60° 回転したものである。よって

$$Z-X=(Y-X)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}=(Y-X)(1-\alpha),\qquad \text{すなわち}\qquad Z=\alpha X+(1-\alpha)Y.$$

考えてみよう 「時計回り」だと、なぜ新しい三角形が ABC の**外側**にできるのか。

$A\to B\to C$ は反時計回りなので、C は向きのついた辺 AB の左側にある。AB を A を中心に時計回りに回すと右側へ振れるので、L は AB に関して C と反対側にある。他の 2 辺についても同様であり、図とも一致する。

N（三角形 CAN なので $X=C$、$Y=A$）：

$$N=\alpha(-r\alpha)+(1-\alpha)p=(1-\alpha)p-\alpha^2 r,$$

これが示すべき式である。$1-\alpha=-\alpha^2$ を用いると、これは $N=-\alpha^2(p+r)$ と整理できる。

L（三角形 ABL なので $X=A$、$Y=B$）：

$$L=\alpha p+(1-\alpha)q\alpha^2=\alpha p+q(\alpha^2-\alpha^3)=\alpha p+q(1+\alpha^2)=(p+q)\alpha,$$

ここで $\alpha^3=-1$、続いて $1+\alpha^2=\alpha$ を用いた。

M（三角形 BCM なので $X=B$、$Y=C$）：

$$M=\alpha\cdot q\alpha^2+(1-\alpha)(-r\alpha)=q\alpha^3+r(\alpha^2-\alpha)=-q-r=-(q+r),$$

ここで $\alpha^3=-1$ と $\alpha^2-\alpha=-1$ を用いた。

したがって、与えられた N の形と同じ書き方をすれば

$$L=\alpha p+\alpha q,\qquad M=-q-r,\qquad N=(1-\alpha)p-\alpha^2 r.$$

3 本の直線

ここで、各組の 2 点を絶対値 1 の複素数の正の倍数として見てみよう。

$$\begin{aligned} L&=(p+q)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, & C&=-r\alpha=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}\cdot(-1),\\ M&=(q+r)\cdot(-1), & A&=p\cdot 1,\\ N&=(p+r)\cdot(-\alpha^2), & B&=q\,\alpha^2. \end{aligned}$$

どの組でも、2 点は絶対値 1 のある複素数 u（それぞれ $u=\alpha$、$u=1$、$u=\alpha^2$）に対して u と $-u$ の正の実数倍になっている。よって 2 点は O を通る同一直線上にあり、しかも O に関して**反対側**にある。ゆえに直線 LC、MA、NB はいずれも原点を通り、実際、原点は各線分上にある。さらに、2 点が O に関して反対側にあるので、各線分の長さは O からの距離の和に等しい。

$$LC=(p+q)+r,\qquad MA=(q+r)+p,\qquad NB=(p+r)+q,$$

これらはすべて $p+q+r$ に等しく、示すべきことが示された。

検算

$p=1$、$q=2$、$r=3$ とすると、公式から $L=3\alpha\approx 1.5+2.598\mathrm{i}$、$M=-5$、$N=-4\alpha^2\approx 2-3.464\mathrm{i}$ が得られる。$|L-A|=|L-B|=|A-B|=\sqrt{7}$ を計算すれば、ABL が正三角形であることが確かめられる。コンピュータで、$\pm 60^\circ$ の 2 通りの回転から各三角形

を直接作り、時計回りのほうを選んで、p, q, r の 10 000 通りのランダムな値について、3つの公式、O での共点性、共通の長さ $p+q+r$ を確認した。面白い特別な場合として、$p=q=r$ のとき三角形 ABC は O を中心とする正三角形になり、図形は予想どおり3回対称性をもつ。

よくある間違い

- 回転の向きを誤り、$\bar{\alpha}=1-\alpha$ ではなく α を掛けてしまう。すると L、M、N が三角形の内側に来てしまい、与えられた N の形は出てこない。
- O が各直線上にあることだけを示し、長さを求めるにはさらに O が端点の**間**にある必要があることを忘れる。これは実数倍の符号によって決まる。

STEP のその先へ

これはナポレオン（Napoleon）の配置の特別な場合である。**任意の**三角形の各辺の外側に正三角形を立てると、直線 AM、BN、CL は1点（フェルマー点（Fermat point））で交わり、しかもそれらの長さは等しい。フェルマー点は3頂点までの距離の和を最小にする点であり、ここではそれが O で、各辺を O から見込む角は $120°$ である。複素数は回転を掛け算に変える。だからこそ、このような証明は短い代数計算になるのである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この幾何学的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。