解答例

STEP III 2000、第 2 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP III 2000、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q2

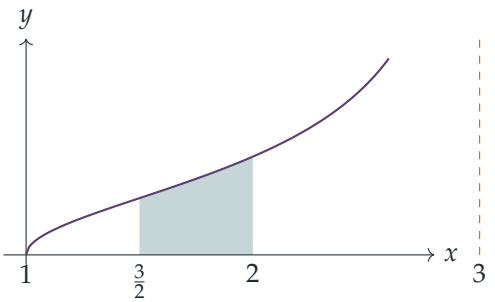
鍵となる考え方

$(x-1)/(3-x)$ のような商の平方根を見たら、半角の公式（half-angle formulae）を使えという合図である。$x = 2 - \cos\theta$ とおくと、分子は $1 - \cos\theta$、分母は $1 + \cos\theta$ となり、その比は完全平方 $\tan^2\frac{\theta}{2}$ になる。一般の結果については、同じ計算をやり直す必要はない。一次の変数変換（change of variable）によって a から b までの区間は 1 から 3 までの区間に移り、一般の積分は最初の積分の定数倍になる。

解答

最初の積分

被積分関数（integrand）は $1 \le x < 3$ で定義されており、積分範囲 $\frac{3}{2} \le x \le 2$ はその中に含まれる。下図の網かけ部分の面積が求める積分である。



$x = 2 - \cos\theta$ とおくと、$\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ である。$x = \frac{3}{2}$ のとき $\cos\theta = \frac{1}{2}$、$x = 2$ のとき

$\cos\theta = 0$ であるから、θ は $\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動かすことにする。このとき

$$x - 1 = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}, \qquad 3 - x = 1 + \cos\theta = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

であるから

$$\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|\tan\tfrac{\theta}{2}\right| = \tan\tfrac{\theta}{2},$$

となる。ここで、この範囲では $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ なので、正接は正であることを用いた。

考えてみよう 被積分関数が $\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta$ になったとき、正接の積分を避けるにはどうすればよいか。

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ と書く。すると余弦が約分される：

$$\tan\tfrac{\theta}{2}\,\sin\theta = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \cdot 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2} = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta.$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\theta - \sin\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{6}.\end{aligned}$$

一般の積分

最初の積分は $a = 1$、$b = 3$ の場合であり、このとき $p = \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2}$、$q = \frac{1+3}{2} = 2$ である。そこで、$u = 1$ を $x = a$ に、$u = 3$ を $x = b$ に移す一次の置換（substitution）を探す：

$$x = a + \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b-a)\,\mathrm{d}u.$$

このとき

$$x - a = \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1), \qquad b - x = (b-a) - \tfrac{1}{2}(b-a)(u-1) = \tfrac{1}{2}(b-a)(3-u),$$

であり、$b - a \neq 0$ であるから共通因数が約分できる：

$$\frac{x-a}{b-x} = \frac{u-1}{3-u}.$$

積分の上端・下端については、$u = \frac{3}{2}$ のとき $x = a + \frac{1}{4}(b-a) = \frac{3a+b}{4} = p$、$u = 2$ のとき $x = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2} = q$ となる。$b - a > 0$ であるからこの置換は増加であり、

上端と下端の順序は保たれる。よって、最初の結果を用いて

$$\int_p^q \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{3/2}^{2}\left(\frac{u-1}{3-u}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{6} = \frac{(b-a)(\pi+3\sqrt{3}-6)}{12},$$

を得る。これが示すべきことであった。

（同じことであるが、直接 $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\cos\theta$ と置換してもよい。積分範囲はやはり $\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{2}$ であり、計算は因数 $\frac{b-a}{2}$ が余分につくだけで同じである。）

検算

- 数値的には $\frac{1}{6}(\pi+3\sqrt{3}-6) \approx 0.38962$ である。もとの被積分関数に $[\frac{3}{2},2]$ 上でシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、小数第 10 位まで同じ値が得られる。
- 妥当性：被積分関数は長さ $\frac{1}{2}$ の区間で $\sqrt{1/3} \approx 0.577$ から 1 まで増加するので、面積はおよそ 0.29 と 0.5 の間になければならない。実際そうなっている。
- 一般の公式は、負の a を含む $a < b$ の無作為な 20 通りの選び方について、シンプソンの公式と一致した。
- スケーリング：区間 $[a,b]$ を k 倍に引き伸ばしても被積分関数の値は変わらないが、$[p,q]$ は k 倍に引き伸ばされる。したがって答えは $b-a$ に比例しなければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ を忘れ、$\tan\frac{\theta}{2}$ だけを θ について積分しようとする。
- 積分範囲を $\theta = -\frac{\pi}{3}$ や $\frac{5\pi}{3}$ としてしまう。どのように選ぶにしても、θ は $\sin\theta > 0$ かつ $\tan\frac{\theta}{2} > 0$ となる範囲を通って $\frac{\pi}{3}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで増加しなければならない。
- 一般の場合に $\mathrm{d}x$ から出る因数 $\frac{1}{2}(b-a)$ を落とし、分母が 12 ではなく 6 になってしまう。

STEP のその先へ

後半の小問は、定積分（definite integral）がアフィンな変数変換（affine change of variable）のもとで予測どおりに変換されることを示している。このような量が a と b に長さ $b-a$ を通してのみ依存するのはこのためである。被積分関数そのものはベータ

関数（beta function）型の被積分関数である。区間全体では $\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{1/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(b-a)$ であり、関数 $\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ は確率論と解析学のいたるところに現れる。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）では、これらはベータ分布（Beta distribution）の正規化定数（normalising constant）として登場する。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は置換積分の法則を丁寧に証明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。