解答例

STEP III 2000、第 11 問

力学 ・ 粗い支点まわりの回転

STEP III 2000、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s3-q11

鍵となる考え方

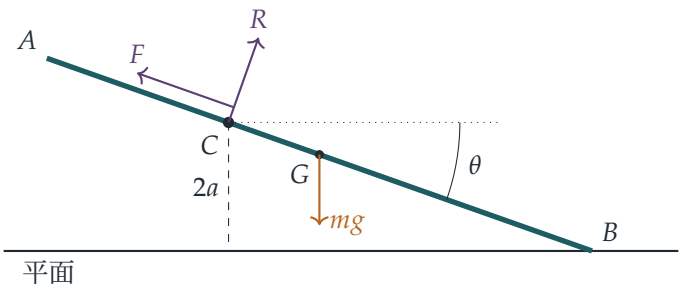
滑りが起こらない限り、棒は梁の上の点 C を中心に回転するだけなので、固定軸（fixed axis）のまわりに回転する剛体（rigid body）である。エネルギーから角速度（angular speed）が、モーメントの式から角加速度（angular acceleration）が得られる。次に、重心（centre of mass）に対するニュートン（Newton）の第二法則を棒に沿った方向と棒に垂直な方向に分解すれば、梁が与えなければならない摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）がわかる。摩擦力が垂直抗力の μ 倍以内にとどまっている間は滑りは起こらない。そして、この条件が B が平面に達するまでずっと成り立つ必要がある。

解答

モデルと幾何

棒を一様な剛体の棒、梁を固定された細く粗い線としてモデル化する。したがって梁は C において一つの接触力を及ぼし、それは棒に垂直な垂直抗力 R と、棒に沿った摩擦力 F からなる。

重心 G は中点であり、A から $4.5a$ の位置にある。$AC = 3a$ であるから、G は C に対して B の側にあり、$CG = \frac{3}{2}a$、$CB = 6a$ である。よって重力は C のまわりにモーメントをもち、棒は B が下がる向きに傾く。棒が回転した角を θ とし、棒が水平と角 θ をなすようにする。



B が平面に達するのは B が $2a$ だけ下がったとき、すなわち $6a\sin\theta = 2a$ となるとき、つまり

$$\sin\theta = \tfrac{1}{3}, \qquad \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

のときである。

C のまわりの回転

C のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は、平行軸の定理（parallel axes theorem）により

$$I_C = \tfrac{1}{12}m(9a)^2 + m\left(\tfrac{3}{2}a\right)^2 = \tfrac{27}{4}ma^2 + \tfrac{9}{4}ma^2 = 9ma^2.$$

である。滑りがない間は C は固定されており、接触力は仕事をしない。G は $\frac{3}{2}a\sin\theta$ だけ下がっているので、（静止状態から始まる）エネルギー保存則（conservation of energy）により

$$\tfrac{1}{2}(9ma^2)\dot\theta^2 = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta^2 = \frac{g\sin\theta}{3a}.$$

となる。C のまわりのモーメントをとると（モーメントをもつのは重力だけである）、

$$9ma^2\,\ddot\theta = mg\cdot\tfrac{3}{2}a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \ddot\theta = \frac{g\cos\theta}{6a}.$$

（エネルギーの式を t で微分しても同じ結果が得られ、よい検算になる。）

接触力

G は C を中心とする半径 $\frac{3}{2}a$ の円周上を動くので、その加速度は、棒に沿って C へ向かう成分 $\frac{3}{2}a\dot\theta^2$ と、棒に垂直で θ が増加する向き（棒を横切って下向き）の成分 $\frac{3}{2}a\ddot\theta$ をもつ。

考えてみよう 摩擦力はどちら向きにはたらくか。また、なぜ単に $mg\sin\theta$ にはならないのか。

重力の棒に沿って下向きの成分 $mg\sin\theta$ は、棒を B の方向へ梁から引きずり出そうとする。さらに G には C へ向かう向心力（centripetal force）が必要である。これらはどちらも摩擦力によって与えられなければならないので、摩擦力は棒に沿って上向き、つまり A の方へはたらく。G の加速度について C へ向かう向きを正として、棒に沿った方向に分解すると

$$F - mg\sin\theta = m\cdot\tfrac{3}{2}a\dot{\theta}^2 = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\sin\theta}{3a} = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta,$$

したがって

$$F = \tfrac{3}{2}mg\sin\theta.$$

である。棒に垂直な方向に、G が加速している向きに分解すると

$$mg\cos\theta - R = m\cdot\tfrac{3}{2}a\ddot{\theta} = m\cdot\tfrac{3}{2}a\cdot\frac{g\cos\theta}{6a} = \tfrac{1}{4}mg\cos\theta,$$

したがって

$$R = \tfrac{3}{4}mg\cos\theta,$$

であり、これは常に正なので、棒は梁と接触したままである。

滑らない条件

$F \le \mu R$ である限り、棒は C で滑らない。すなわち

$$\frac{F}{R} = \frac{\frac{3}{2}mg\sin\theta}{\frac{3}{4}mg\cos\theta} = 2\tan\theta \le \mu.$$

比 $2\tan\theta$ は手を放した時点の 0 から θ とともに増加するので、この条件が最も厳しくなるのは最後の瞬間、すなわち B がちょうど平面に達するときである。そのとき $\tan\theta = 1/(2\sqrt{2})$ であるから、

$$\mu \ge 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

が必要である。よって μ の最小値は

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.}$$

である。ちょうどこの値のとき、摩擦力が限界に達するのは B が平面に当たる瞬間だけであり、これより小さい μ では、それより前に滑りが始まる。

検算

- 手を放した時点では $\dot{\theta} = 0$ なので $F = 0$、$R = \frac{3}{4}mg$ である。G が $\frac{3}{2}a\ddot{\theta} = \frac{1}{4}g$ で下向きに加速し始めるため、梁が支えるのは重さ全体より小さい。これはおなじみの「手を放した板は軽く感じる」という効果である。

- 単位：F と R はどちらも mg の定数倍であり、μ は無次元量である。そうでなければならない。
- 方程式 $\ddot{\theta} = g\cos\theta/(6a)$ を静止状態から数値的に解き進め、G の加速度を差分で計算し、ニュートンの第二法則から F と R を求め直した。それらは $\frac{3}{2}mg\sin\theta$ および $\frac{3}{4}mg\cos\theta$ と一致し、F/R は単調に増加して $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき $0.7071\ldots = 1/\sqrt{2}$ に達する。

よくある間違い

- 中心のまわりのモーメントをとったり、平行軸の項を忘れたりすること。$I_C = 9ma^2$ であって、$\frac{27}{4}ma^2$ ではない。
- 問題を静力学（statics）として扱い、$F = mg\sin\theta$、$R = mg\cos\theta$ とすること。これでは $\mu \geq \tan\theta$ となってしまう。G の向心加速度と接線加速度の両方が力を変えるのである。
- 摩擦の条件を、条件が最も厳しくなる点ではなく、$F = 0$ である手を放した時点でしか確かめないこと。

STEP のその先へ

この問題は、束縛力（constraint forces）を伴う剛体の力学への最初の入り口である。エネルギーとモーメントから運動を求め、そのあとで初めて重心に対するニュートンの法則を用いて、束縛が与えなければならない力を逆算した。同じ手順（運動を解き、それから束縛が必要な力を実際に与えられるかを確かめる）によって、はしごがいつ滑り始めるか、倒れる鉛筆がいつ机から離れるか、ビーズがいつ針金から外れるかが決まる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりの回転、およびトルク（torque）と重心の運動との関係を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。