解答例

STEP III 2000、第 10 問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

> **STEP III 2000、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q10

鍵となる考え方

まず幾何から始める。距離 $\sqrt{3}a$ と a は、梁が地面と特別な角度で交わるように選ばれており、それによって問題に現れるすべての向きが決まる。次に、未知の力が消える 2 点のまわりで力のモーメント（moments）をとる。蝶番（hinge）X のまわりでは、梁の式には球からの垂直抗力（normal reaction）しか現れない。球からの摩擦力（friction）は梁そのものに沿ってはたらくからである。球の中心のまわりでは、2 つの摩擦力以外のすべての力が中心を通るので、2 つの摩擦力は等しくなければならない。

解答

モデルと幾何

梁を一様な棒（uniform rod）とみなし、球を一様な剛体（rigid body）とみなして、その重力は中心 C にはたらくとする。どちらの接触も粗い。球が地面に接する点を O とすると、$OX = \sqrt{3}a$、$OC = a$ であり、OC は鉛直である。

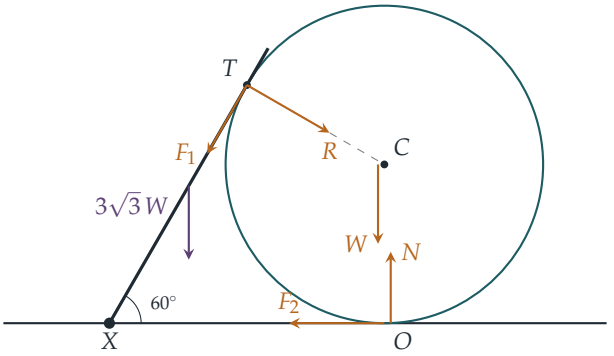
梁は点 T で球に接しており、そこで球の接線（tangent）になっている。地面は X から引いたもう一方の接線である。直角三角形 XOC において、

$$\tan\angle OXC = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{よって} \qquad \angle OXC = 30^\circ.$$

X から引いた 2 本の接線は直線 XC に関して対称なので、梁は地面と角 $2\times 30^\circ = 60^\circ$ をなす。1 点から引いた接線の長さは等しいので、$XT = XO = \sqrt{3}a$ である。$\sqrt{3}a < 2a$ であるから、接点は確かに梁の上にあり、梁の中点より少し先に位置する。

半径 CT は梁に垂直である。したがって、T における垂直抗力は水平と 30° をなし、T

における摩擦力は梁に沿って、水平と 60° の向きにはたらく。



琥珀色の矢印は球にはたらく力である。梁には R と F_1 が逆向きにはたらき、さらに中点（X から距離 a）に重力 $3\sqrt{3}\,W$ が、蝶番には未知の反力がはたらく。

摩擦力の向きは仮定してある。球に対して、F_1 は梁に沿って X の方へ下向きにはたらき、F_2 は地面に沿って X の方へはたらくとする。仮定が誤っていれば、その力は負の値として求まる。

梁：X のまわりのモーメント

蝶番の反力は X にはたらくので、X のまわりのモーメントをもたない。球からの摩擦力は梁に沿ってはたらき、梁の直線は X を通るので、これもモーメントをもたない。垂直抗力 R は距離 $XT = \sqrt{3}\,a$ の位置で梁に垂直にはたらく。重力は X から水平距離 $a\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$ の位置にはたらく。よって

$$R \cdot \sqrt{3}\,a = 3\sqrt{3}\,W \cdot \tfrac{1}{2}a, \qquad \text{よって} \qquad R = \tfrac{3}{2}W.$$

球：C のまわりのモーメント

力 R、W、N はいずれも C を通る（垂直抗力は半径に沿ってはたらく）。2 つの摩擦力は接線方向で、それぞれ C から距離 a のところにある。T における F_1 は球を C のまわりに一方の向きに回そうとし、O における F_2 は逆向きに回そうとするので、

$$F_1 a = F_2 a, \qquad \text{よって} \qquad F_1 = F_2.$$

この共通の値を F とおく。

考えてみよう 2 つの摩擦力について他に何もわかっていない段階で、なぜそれらが等しいと確信できるのか。

球は平衡（equilibrium）にあるので、任意の点のまわりのモーメントの総和は 0 である。中心を選ぶのがうまい方法である。重力と 2 つの垂直抗力はすべて中心を通るので、残るのは摩擦力だけであり、それらの腕の長さはともに a で等しい。

球：力の分解

水平方向について、X から遠ざかる向きを正とする（力の分解（resolving））。R の成分は $R\cos 30°$、F_1 の成分は $-F\cos 60°$、F_2 の寄与は $-F$ である。よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{1}{2}F + F = \frac{3}{2}F, \qquad \text{よって} \qquad F = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}W.$$

これは正なので、仮定した摩擦力の向きは正しかった。鉛直方向については、R は成分 $R\sin 30°$ で下向きに押し、F_1 は成分 $F\sin 60°$ で下向きに引く。よって

$$N = W + \tfrac{1}{2}R + \tfrac{\sqrt{3}}{2}F = W + \tfrac{3}{4}W + \tfrac{3}{4}W = \tfrac{5}{2}W.$$

摩擦係数

球は両方の接点で今にもすべり出そうとしているので、どちらの摩擦も極限摩擦（limiting friction）である。すなわち $F_1 = \mu_1 R$、$F_2 = \mu_2 N$ である。したがって、摩擦係数（coefficient of friction）は

$$\mu_1 = \frac{F}{R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{3}{2}W} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \mu_2 = \frac{F}{N} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\frac{5}{2}W} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

検算

- 座標を用いた数値検算（$a = 1.3$、$W = 2$）により、T が球面上にあり、CT が梁に垂直であることを確かめた。球の 3 つの平衡方程式を直接解くと $R = 1.5W$、$F_1 = F_2 \approx 0.8660W$、$N = 2.5W$ となり、$\mu_1 \approx 0.5774 = 1/\sqrt{3}$、$\mu_2 \approx 0.3464 = \sqrt{3}/5$ を得た。
- 独立な方程式による確認：球について O のまわりのモーメントをとる。このとき N、F_2、W はモーメントをもたない。R の作用線は C を通るので、そのモーメントは高さ a における水平成分のモーメント、すなわち $\frac{\sqrt{3}}{2}R\,a$ に等しい。O のまわりの F_1 のモーメントは計算すると $\frac{3}{2}aF$ となる。これらを等しいとおくと、C のまわりのモーメントの式を使わずに、再び $F = R/\sqrt{3}$ が得られる。
- どちらの係数も 1 より小さく、通常の粗い接触として物理的に妥当である。

よくある間違い

- 梁の角度を 60° ではなく 30°（XC の角度）としてしまう。
- N を求めるときに F_1 の鉛直成分を忘れる。すると $N = \frac{7}{4}W$ となり、誤った μ_2 が得られる。
- 球からの摩擦力を、X のまわりの梁のモーメントの式に含めてしまう。この力は梁に沿ってはたらくので、X のまわりのモーメントは 0 である。

STEP のその先へ

平面内の剛体は 3 つの自由度（degrees of freedom）をもつので、3 つの独立な平衡方程式が得られる。ここでは球に 5 つの未知の接触力があり、梁から R が得られることでその数が減る。さらに 2 つの「極限摩擦」の条件によって、問題は解ける連立方程式になる。このように方程式の数と未知数の数を比べ、系が不静定（statically indeterminate）になる場合を見抜くことは、構造力学（structural mechanics）の出発点である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルク（torque）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。