解答例

STEP III 2000、第 1 問

純粋数学 ・ 双曲線の接線

> **STEP III 2000、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q1

鍵となる考え方

2 つの曲線はどちらも原点を中心とする直角双曲線（rectangular hyperbola）であり、どちらも半回転（half-turn）$(x, y) \mapsto (-x, -y)$ によって変わらない。この対称性から Q はただちに得られる。接線については、連立方程式を力ずくで解くのではなく、提示された点が両方の直線上にあることを、$ab = 1$ と $a^2 - b^2 = 2$ という 2 つの事実を使って**確かめる**のがうまい方法である。4 つの点が求まれば、原点のまわりの 4 分の 1 回転によって正方形になる理由が説明できる。

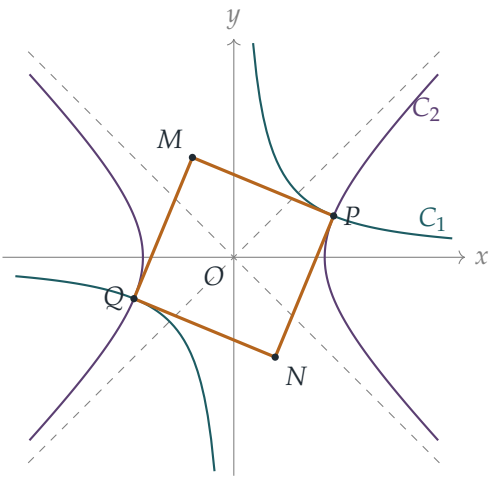
解答

概形

C_1、すなわち $xy = 1$ は、第 1 象限と第 3 象限にあるおなじみの直角双曲線であり、座標軸を漸近線（asymptote）とする。

C_2、すなわち $x^2 - y^2 = 2$ は、x 軸と $(\pm\sqrt{2}, 0)$ で交わり、y 軸とは決して交わらない（交わるとすれば $-y^2 = 2$ が必要になる）。$y^2 = x^2 - 2$ と書くと、$|y| < |x|$ であり、$|x|$ が大きいとき $y \approx \pm x$ となることがわかるので、その漸近線は $y = \pm x$ である。これは C_1 を原点のまわりに 45° 回転させた（そして $\sqrt{2}$ 倍に拡大した）ものであり、枝は左右に開いている。

2 つの曲線はどこで交わるか。$xy = 1 > 0$ であるから、共有点はすべて第 1 象限か第 3 象限にある。$y = 1/x$ を C_2 に代入すると $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ となるので、$x^2 = 1 + \sqrt{2}$ である（もう一方の解 $1 - \sqrt{2}$ は負である）。したがって交点はちょうど 2 つあり、それぞれの象限に 1 つずつある。



図では C_1 を青緑色、C_2 を紫色で示し、C_2 の漸近線 $y = \pm x$ を破線で示している。琥珀色の正方形 $PMQN$ が、これから求めるものである。

点 Q

(x, y) を $(-x, -y)$ に置き換えても、xy と $x^2 - y^2$ はどちらも変わらない。したがって (a, b) が両方の曲線上にあれば、$(-a, -b)$ も両方の曲線上にある。交点は 2 つしかないので、

$$Q = (-a, -b).$$

以下では、P が両方の曲線上にあるという 2 つの事実

$$ab = 1, \qquad a^2 - b^2 = 2.$$

を一貫して用いる。

接線

C_1 について、$xy = 1$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となるので、C_1 上の点 (p, q) における傾きは $-q/p$ である。そこでの接線（tangent）は $p(y - q) = -q(x - p)$、すなわち

$$qx + py = 2pq = 2.$$

である。C_2 について、$x^2 - y^2 = 2$ を微分すると $2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ となるので、(p, q) における傾きは p/q である。接線は $q(y - q) = p(x - p)$、すなわち

$$px - qy = p^2 - q^2 = 2.$$

である（どちらの形も、傾きが垂直になる点でも成り立つ。これらは単に、曲線の勾配ベクトルと (x,y) との内積をとったものにすぎない）。$P=(a,b)$ と $Q=(-a,-b)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\text{接線、}C_1\text{ 上の点}P:&\quad bx+ay=2,\\
\text{接線、}C_2\text{ 上の点}Q:&\quad -ax+by=2,\\
\text{接線、}C_2\text{ 上の点}P:&\quad ax-by=2,\\
\text{接線、}C_1\text{ 上の点}Q:&\quad -bx-ay=2.
\end{aligned}$$

点 M

M は最初の 2 直線の交点である。$(x,y)=(-b,a)$ を試すと、

$$\begin{aligned}
bx+ay&=-b^2+a^2=2,\\
-ax+by&=ab+ab=2ab=2.
\end{aligned}$$

したがって $(-b,a)$ は両方の直線上にある。係数の行列式（determinant）は $b\cdot b-a\cdot(-a)=a^2+b^2\neq 0$ であるから 2 直線は平行ではなく、ちょうど 1 点で交わる。よって

$$M=(-b,a),$$

であり、これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 与えられた答えを確かめるのは、それを解いて求めるよりも弱いのではないか？

ここではそうではない。平行でない 2 直線はちょうど 1 点で交わるので、両方の直線上にある点はどれも、まさにその交点である。直接解いてもよいが、その場合も結局は $ab=1$ と $a^2-b^2=2$ を使って答えを整理しなければならない。

点 N

同様に、N は $ax-by=2$ と $-bx-ay=2$ の交点である。点 $(b,-a)$ を代入すると

$$ab+ab=2,\qquad -b^2+a^2=2,$$

となり、行列式は $a(-a)-(-b)(-b)=-(a^2+b^2)\neq 0$ である。よって

$$N=(b,-a).$$

$PMQN$ **は正方形である**

4 つの位置ベクトル（position vector）を見てみよう。

$$P=(a,b),\quad M=(-b,a),\quad Q=(-a,-b),\quad N=(b,-a).$$

O のまわりの反時計回りの 90° 回転（rotation）は (x, y) を $(-y, x)$ に移す。したがってこの回転は $P \to M \to Q \to N \to P$ と移す。これですでに答えは見えているが、ここでは直接的な議論を与えよう。

- 対角線 PQ と MN の中点はどちらも O であるから、2 本の対角線は互いに他を二等分し、$PMQN$ は平行四辺形（parallelogram）である。
- 対角線の長さはどちらも $2\sqrt{a^2+b^2}$ であるから、2 本は等しく、この平行四辺形は長方形である。
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = a(-b) + b(a) = 0$ であるから、対角線は直交し、この長方形はひし形（rhombus）である。

長方形でありかつひし形でもある四角形は正方形である。頂点の順序も正しい。P、M、Q、N は O のまわりに 4 分の 1 回転ずつ順に並んでいるので、$PMQN$ は自己交差することなく正方形を一周する。よって $PMQN$ は正方形である。 ■

その 1 辺の長さの 2 乗は $|PM|^2 = (a+b)^2 + (b-a)^2 = 2(a^2+b^2)$ である。$a^2 = 1+\sqrt{2}$、$b^2 = 1/a^2 = \sqrt{2}-1$ より、これは $4\sqrt{2}$ となる。

検算

- 数値的には $a = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.5538$、$b \approx 0.6436$ である。接線どうしの交点を数値的に求めると $M \approx (-0.6436, 1.5538)$、$N \approx (0.6436, -1.5538)$ となり、主張どおりである。4 辺はすべて $2.3784 \approx \sqrt{4\sqrt{2}}$ となり、隣り合う辺は直交する。
- P の偏角は $\arctan(b/a) = \arctan(\sqrt{2}-1) = 22.5°$ であり、これは C_1 の漸近線 $y = 0$ と C_2 の漸近線 $y = x$ のちょうど中間である。したがって正方形は 22.5° 傾いており、概形の図のとおりである。

よくある間違い

- C_2 の接線を $px + qy = 2$ と書いてしまう。マイナス符号は重要であり、それがあるからこそ計算がうまくいく。
- 鏡映対称性を当て推量して $Q = (b, a)$ や $(-b, -a)$ とする。直線 $y = x$ に関する鏡映は C_1 を保つが C_2 は保たない。両方を保つのは O のまわりの半回転だけである。
- 4 辺が等しいことだけを示す。それではひし形であることしかわからない。直角（あるいは対角線が等しいこと）も必要である。

STEP のその先へ

ここで用いた接線の公式 $qx + py = 2$ と $px - qy = 2$ は、円錐曲線（conic）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$ の $\mathbf{p}$ における接線は $\mathbf{p}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x} = c$ である、という一般的な規則の例である。大学 1 年の二次形式（quadratic form）の講義では、回転によって A を対角化（diagonalise）することを学ぶ。それこそが、$xy = 1$ と $x^2 - y^2 = 2$ が 45° 回転させただけの同じ曲線である理由である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次形式と回転をわかりやすく扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には STEP 形式の座標幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。