解答例

STEP II 2000、第 9 問

力学 ・ 空気抵抗を受ける運動

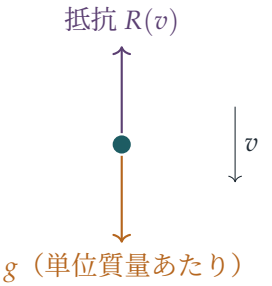
> **STEP II 2000、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q9

鍵となる考え方

どちらの降下者も、速さだけに依存する抵抗を受けながらニュートン（Newton）の運動の第 2 法則に従うので、v と t についての 1 階の微分方程式（differential equation）が得られ、これは変数分離（separation of variables）できる。「速さが決して到達しない」という結果は終端速度（terminal speed）、すなわち抵抗がちょうど重力とつり合う速さから得られる。解はこの値に向かって少しずつ近づくが、有限の時間で到達することはない。カレンの場合は、無次元（dimensionless）の速さ $u = kv/g$ を用いて書き直すと、2 次式がきれいに因数分解できる。

解答

各降下者を、静止状態から鉛直に落下する質点とみなし、重力加速度 g は下向きに一定とする。下向きの速さを $v \geq 0$ とし、t は飛び降りた瞬間から測る。単位質量あたりにはたらく力は、下向きの重力 g と上向きの空気抵抗であるから、ニュートンの第 2 法則により $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - (\text{単位質量あたりの抵抗})$ となる。



ジェーンの速さの上界

ジェーンの運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv = k\Big(\frac{g}{k} - v\Big).$$

である。はじめ $v = 0 < g/k$ である。$v < g/k$ である間は $g/k - v > 0$ で割ることができ、変数を分離して

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}w}{g/k - w} = \int_0^t k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad -\ln\Big(1 - \frac{kv}{g}\Big) = kt,$$

を得る。よって

$$v = \frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

である。右辺は有限のすべての t に対して g/k より小さく、これは割り算に用いた条件そのものであるから、この式はすべての $t \geq 0$ で成り立つ。$\mathrm{e}^{-kt} > 0$ なので、すべての t に対して $v < g/k$ である。したがって、ジェーンの速さは $t \to \infty$ のとき g/k に近づくが、決して到達しない。

カレンの速さの上界

カレンの運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv - \frac{2k^2}{g}v^2.$$

である。無次元の速さ $u = kv/g$ を導入する。すると右辺は

$$g(1 - u - 2u^2) = g(1 - 2u)(1 + u), \qquad \text{であり} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(1 - 2u)(1 + u).$$

となる。加速度が 0 になるのは $u = \frac{1}{2}$ のとき（根 $u = -1$ は物理的な速さではない）、すなわち $v = g/(2k)$ のときである。これがカレンの終端速度である。

はじめ $u = 0 < \frac{1}{2}$ である。$0 \leq u < \frac{1}{2}$ である間は 2 つの因数はともに正であるから、変数分離ができる。部分分数（partial fractions）に分解すると

$$\frac{1}{(1 - 2u)(1 + u)} = \frac{2/3}{1 - 2u} + \frac{1/3}{1 + u},$$

となり、これは $1 = A(1 + u) + B(1 - 2u)$ に $u = -1$ と $u = \frac{1}{2}$ を代入すれば確かめられる。したがって

$$kt = \int_0^u \Big(\frac{2/3}{1 - 2w} + \frac{1/3}{1 + w}\Big)\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\Big[-\ln(1 - 2w) + \ln(1 + w)\Big]_0^u = \frac{1}{3}\ln\frac{1 + u}{1 - 2u}.$$

である。$\dfrac{1 + u}{1 - 2u} = \mathrm{e}^{3kt}$ を変形すると

$$u = \frac{\mathrm{e}^{3kt} - 1}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} < \frac{1}{2}.$$

を得る。先ほどと同じ理由でこの式はすべての $t \geq 0$ で成り立つから、カレンの速さは

$$v < \frac{g}{2k} \quad \text{すべての時刻} t.$$

を満たす。これが対応する結果である。彼女の速さは $g/(2k)$ に近づくが、決して到達しない。

ジェーンが $g/(3k)$ に達するまでの時間

ジェーンの解に $v = g/(3k)$ を代入すると $1 - \mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{3}$ となるので、$\mathrm{e}^{-kt} = \frac{2}{3}$ であり

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{3}{2},$$

となって、示すべき結果が得られる。

カレンが $g/(3k)$ に達するまでの時間

> **考えてみよう** t を用いた u の式が必要だろうか。それとも、もっと早い方法があるだろうか。

早い方法は、すでに得ている u を用いた t の式を使うことである。速さ $g/(3k)$ は $u = \frac{1}{3}$ を意味し、これは $\frac{1}{2}$ より小さいので、彼女はこの速さに到達する。このとき

$$\frac{1+u}{1-2u} = \frac{4/3}{1/3} = 4, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{1}{3k} \ln 4 = \frac{2}{3k} \ln 2.$$

である。

検算

- 正のどの速さにおいても、カレンはジェーンより大きな抵抗を受けるので、同じ速さに達するまでにより長い時間がかかるはずである。実際、$\frac{2}{3} \ln 2 \approx 0.462$ は $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405$ より大きい。
- t が小さいとき、どちらの式も $v \approx gt$ を与える。これは抵抗のない自由落下であり、当然そうなるべきである。$u = (\mathrm{e}^{3kt} - 1)/(2\mathrm{e}^{3kt} + 1) \approx 3kt/3 = kt$ と展開すると $v \approx gt$ が得られる。
- 両方の方程式を静止状態から数値的に解いた（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）、$g = 9.8$、$k = 0.7$）。速さはそれぞれ g/k と $g/(2k)$ である 14 と 7 を下回り続け、速さ $g/(3k)$ には $t \approx 0.5792$ と $t \approx 0.6601$ で到達した。これらは $k^{-1} \ln \frac{3}{2}$ および $\frac{2}{3k} \ln 2$ と約 10^{-9} の精度で一致する。

よくある間違い

- 加速度が正であることだけから「速さは決して g/k に到達しない」と論じること。それでわかるのは速さが増加することだけで、g/k より小さいままであることは示せない。陽な解を求めるか、終端速度に達するまでの時間が無限大であることを論証する必要がある。
- $\ln(1-2u)$ の項の符号を間違えること。$\frac{1}{1-2u}$ を積分すると $-\frac{1}{2}\ln(1-2u)$ となる。

STEP のその先へ

どちらの方程式も自励的（autonomous）、すなわち $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$ の形である。終端速度はこのような方程式の安定平衡点（stable equilibrium）である。常微分方程式の一意性定理（uniqueness theorem）により、f が滑らかであれば、解が有限の時間で平衡点に到達することはないことが示される。これが 2 つの上界の背後にある一般的な理由である。カレンの方程式はリッカチ方程式（Riccati equation）であり、同じロジスティック（logistic）型のふるまいは個体数モデルにも現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は自励的な方程式とその平衡点を扱っており、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は抵抗を受ける運動を論じている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。