解答例

STEP II 2000、第 8 問

純粋数学 • 変数分離形の微分方程式

> **STEP II 2000、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も変数分離形（separable）である。すなわち、x への依存と y への依存が積の形で現れるので、y を含むものをすべて一方の辺に、x を含むものをすべてもう一方の辺に集めることができる。x 側はどれも $x\,\mathrm{e}^{ax^2}$ の形をしており、x が x^2 の導関数（derivative）の（定数倍である）ため、すぐに積分できる。小問 (ii) では $(y+3)$ の指数を自分で選ぶことができ、y の増大の仕方がちょうど e^{3x^2} に一致するように選ぶのである。

解答

小問 (i)

$x=0$ で $y=6$ であるから、出発点の近くでは $y+3>0$ であり、$(y+3)^{1/2}$ で割ってよい：

$$(y+3)^{-1/2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

両辺を x で積分し、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ を用いると、

$$2(y+3)^{1/2} = 2\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

$x=0$、$y=6$ を代入すると $2\cdot 3 = 2 + C$ となるので、$C=4$ であり、

$$(y+3)^{1/2} = \mathrm{e}^{-x^2} + 2.$$

右辺は常に 2 以上であるから、これは正当な（正の）平方根であり、$y+3$ が 0 に達することはない。したがって、上で行った割り算はすべての $x \geq 0$ について正当化され

る。両辺を 2 乗して、

$$\boxed{y = (2 + \mathrm{e}^{-x^2})^2 - 3 = 1 + 4\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-2x^2}}.$$

$x \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-x^2} \to 0$ かつ $\mathrm{e}^{-2x^2} \to 0$ であるから、求められているとおり $y \to 1$ となる。

小問 (ii)

ここでの方程式は

$$(y+3)^{k-1} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}.$$

である。一般の（整数とは限らない）指数が意味をもつためには $y+3 > 0$ が必要である。$x > 0$ では $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$ なので y は増加し、したがって $y+3$ は最初に正であれば正のままである。$k \neq 0$ のとき、積分すると

$$\frac{(y+3)^k}{k} = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{12} + C, \qquad \text{よって} \qquad (y+3)^k = \frac{k}{12}\,\mathrm{e}^{6x^2} + kC.$$

考えてみよう どの k を試すべきだろうか？

$k > 0$ ならば、x が大きいとき定数は無視でき、$y + 3 \approx (k/12)^{1/k}\,\mathrm{e}^{6x^2/k}$ となる。y が e^{3x^2} のように増大してほしいので、$6/k = 3$、すなわち $k = 2$ でなければならない。（それ以外の $k > 0$ では、$\mathrm{e}^{-3x^2}y$ は 0 または ∞ に向かう。）

そこで $k = 2$ とする。このとき方程式は $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}/(y+3)$ となり、その解は

$$(y+3)^2 = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{6} + D,$$

である。ここで $D = (y_0+3)^2 - \frac{1}{6}$ であり、y_0 は $x = 0$ における y の値である。右辺は $(y_0+3)^2 > 0$ から増加していくので正のままであり、解はすべての $x \geq 0$ に対して存在する：

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2} + D} - 3.$$

e^{-3x^2} を掛け、根号の中では $\mathrm{e}^{-3x^2} = \sqrt{\mathrm{e}^{-6x^2}}$ として取り込むと、

$$\mathrm{e}^{-3x^2}y = \sqrt{\tfrac{1}{6} + D\,\mathrm{e}^{-6x^2}} - 3\mathrm{e}^{-3x^2} \longrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

となる（$x \to \infty$）。二つの指数関数がいずれも 0 に向かうからである。よって $k = 2$ のとき、極限は

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-3x^2}y = \frac{1}{\sqrt{6}}},$$

であり、これは初期値によらない。定数 D は答えから消えており、だからこそ問題文では「任意の解」と言えるのである。

$k=2$ のときは、$(y+3)^{-1}$ という累乗は $y<-3$ に対しても意味をもつ。その枝では $y+3=-\sqrt{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}$ であり、同じ議論により極限は $-1/\sqrt{6}$ となる。意図された答えは、$y>-3$ である解に対する $1/\sqrt{6}$ である。

検算

- (i) で $x=0$ とすると $y=(2+1)^2-3=6$ であり、$y=(2+\mathrm{e}^{-x^2})^2-3$ を微分すると $-4x\mathrm{e}^{-x^2}(2+\mathrm{e}^{-x^2})=-4x\mathrm{e}^{-x^2}(y+3)^{1/2}$ となる。
- 両方の方程式を数値的に（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）で）解き進めた結果は、公式と一致する。たとえば (i) では $y(2)\approx 1.07360$ であり、(ii) では $y_0=6$ から出発すると $\mathrm{e}^{-12}y(2)\approx 0.408230$ となって、すでに $1/\sqrt{6}\approx 0.408248$ に近い。

よくある間違い

- 積分定数（constant of integration）を 2 乗した後まで書き忘れたり、$y=6$ を誤った式に当てはめたりすること。
- $x\,\mathrm{e}^{6x^2}$ の積分を $\mathrm{e}^{6x^2}/12$ ではなく $\mathrm{e}^{6x^2}/6$ としてしまうこと。これは k には影響しないが、極限は変わってしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) はささやかな漸近解析（asymptotic analysis）の例である。積分定数は増大する項に圧倒されてしまうので、初期値を気にすることなく、x が大きいときに解がどう振る舞うかを求めることができた。解のどの性質が初期条件（initial conditions）に依存しないかを問うことは、微分方程式（differential equations）の定性的理論の中心にある。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は、変数分離形の方程式と、このような長時間挙動を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。