解答例

STEP II 2000、第 7 問

純粋数学 ・ 直線と円錐

> **STEP II 2000、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q7

鍵となる考え方

何よりも先に、$\mathbf{s}$ の長さを求めよう。$\cos\theta \pm \sqrt{3}$ の項は、交差項（cross terms）が打ち消し合って $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ が現れるように仕組まれている。そのため $|\mathbf{s}|$ は θ にまったく依存しない。あとはすべてスカラー積（scalar product）から導かれる。また、組み合わせ $s_x - s_z$ も θ を含まない。これは m の方向を直接指し示しており、最後の小問で平面 $x - z =$ 定数 が現れる理由もこれで説明できる。

解答

l と一般の直線のなす角

簡単のため $c_\theta = \cos\theta$ と書く。$\mathbf{s}$ の長さは

$$\begin{aligned} |\mathbf{s}|^2 &= (c_\theta + \sqrt{3})^2 + 2\sin^2\theta + (c_\theta - \sqrt{3})^2 \\ &= 2c_\theta^2 + 6 + 2\sin^2\theta = 8, \end{aligned}$$

である。$\pm 2\sqrt{3}\,c_\theta$ の交差項が打ち消し合うからである。よって、すべての θ に対して $|\mathbf{s}| = 2\sqrt{2}$ である。

$\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ とおく。すると

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d} = a(c_\theta + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\,b\sin\theta + c(c_\theta - \sqrt{3}) = (a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c).$$

となる。したがって、2 直線のなす角 ϕ は

$$\cos\phi = \frac{(a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

を満たす。直線には特定の向きがないので、鋭角（acute angle）のほうを求めたい場合は右辺の絶対値をとればよい。

直線 m

$\cos\phi$ が θ によらないような方向 $\mathbf{d}$ を求めたい。分子を見ると、θ への依存がなくなるのはちょうど $a+c=0$ かつ $b=0$ のときである。そこで $\mathbf{d}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$（$a=1, b=0, c=-1$）を試すと

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

となる。これは正なので ϕ はすでに鋭角であり、すべての θ に対して $\phi=\pi/6$ である。よって、原点を通る直線

$$m: \quad \mathbf{r}=\mu(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$

が求める条件を満たす。θ が変化すると、l は m を軸とし半頂角（semi-vertical angle）$\pi/6$ の円錐（cone）を描く。

P が描く円

l 上では $x-z=\lambda(s_x-s_z)=\lambda((c_\theta+\sqrt{3})-(c_\theta-\sqrt{3}))=2\sqrt{3}\lambda$ である。これを $4\sqrt{3}$ とおくと、θ の値にかかわらず $\lambda=2$ となるので

$$\overrightarrow{OP}=2\mathbf{s}=(2\cos\theta+2\sqrt{3})\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+(2\cos\theta-2\sqrt{3})\,\mathbf{k}.$$

である。直線 m は $\mu-(-\mu)=4\sqrt{3}$、すなわち $\mu=2\sqrt{3}$ のところで平面と交わり、その交点 C は

$$\overrightarrow{OC}=2\sqrt{3}\,\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{k}.$$

で与えられる。

考えてみよう なぜ C が中心の候補として自然なのだろうか。

平面 $x-z=4\sqrt{3}$ の法線（normal）は $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ であり、これは m の方向である。つまり m は円錐の軸であり、平面に垂直である。そして、どんな円錐も軸に垂直な平面で切ると、軸がその平面と交わる点を中心とする円が得られる。ここではこれを直接確かめる：

$$\overrightarrow{CP}=2\cos\theta\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+2\cos\theta\,\mathbf{k}, \qquad |\overrightarrow{CP}|^2=4\cos^2\theta+8\sin^2\theta+4\cos^2\theta=8.$$

よって、P のどの位置も平面上にあり、その平面上の定点 C からの距離は $2\sqrt{2}$ である。言い換えれば、P は平面上の中心 C、半径 $2\sqrt{2}$ の円の上にあり、C は m 上にある。

P が実際に円全体を描くことを確かめるために、

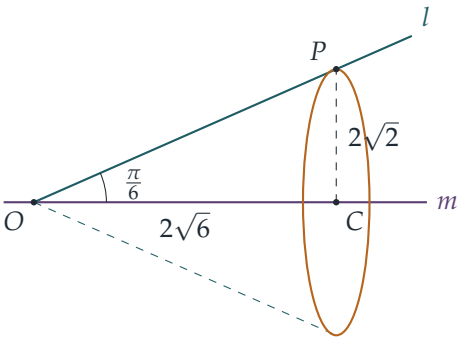
$$\overrightarrow{CP}=2\sqrt{2}\,(\cos\theta\,\mathbf{u}+\sin\theta\,\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}), \quad \mathbf{v}=\mathbf{j}.$$

と書く。ここで $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は互いに垂直な単位ベクトル（unit vector）であり、どちらも $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ に垂直なので、平面に沿った向きをもつ。θ が 0 から 2π まで動くと、P は円をちょうど 1 周する。半径は

$$\boxed{2\sqrt{2}}.$$

である。

半径を求めるもっと手早い方法もある。$|OP| = 2|\mathbf{s}| = 4\sqrt{2}$、$|OC| = 2\sqrt{6}$ であり、OC は平面に垂直なので、ピタゴラスの定理（Pythagoras' theorem）により $CP = \sqrt{32-24} = 2\sqrt{2}$ となる。同じことだが、$CP = OC\tan\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}/\sqrt{3}$ としてもよい。



検算

- $\theta = 0$ のとき $\mathbf{s} = (1+\sqrt{3}, 0, 1-\sqrt{3})$ であり、$|\mathbf{s}|^2 = (4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3}) = 8$、$\mathbf{s}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{k}) = 2\sqrt{3}$ となって、$\cos\phi = \sqrt{3}/2$ が得られる。
- 半径を求める 2 通りの方法は一致する：$\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$ および $2\sqrt{6}\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{8} \approx 2.828$。
- 数値的に、20 000 個のランダムな θ（一般の公式についてはランダムな a, b, c も）に対して、m とのなす角は $\pi/6$ に等しく、P は平面上にあり、$|CP| = 2.8284\ldots$ であることが、いずれも誤差 10^{-15} 以内で確かめられる。

よくある間違い

- $|\mathbf{s}|$ で割るのを忘れる、あるいは $\mathbf{s}$ を単位ベクトルだと思い込む。その長さは $2\sqrt{2}$ である。
- P が O を中心とする球面（sphere）上にあること（すなわち $|OP| = 4\sqrt{2}$）だけを示して終わる。球面を平面で切れば円になるが、その中心がなぜ m 上の点 C なの

かを述べる必要がある。その理由は、OC が平面に垂直だからである。

STEP のその先へ

直線 l は直円錐を描く。円錐を平面で切ることこそ、円錐曲線（conic sections）という名前の由来である。軸に垂直な平面で切れば円が得られ、平面を傾ければ楕円（ellipse）、放物線（parabola）、双曲線（hyperbola）が得られる。大学 1 年の講義では、この円錐を二次曲面（quadric surface）$(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 = |\mathbf{r}|^2\cos^2\alpha$ として記述し、対称行列（symmetric matrix）の固有値（eigenvalue）を用いてこのような曲面を分類する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）でこの内容が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。