解答例

STEP II 2000、第 6 問

純粋数学 • 半角の置換

> **STEP II 2000、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q6

鍵となる考え方

置換（substitution）$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ は、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の任意の有理関数（rational function）を t の有理関数に変える。この問題では、その結果は 2 を 2 次式で割った形になる。平方完成（completing the square）を行うと逆正接（arctangent）が現れ、前半の第 3 の恒等式（identity）は、上端における逆正接を簡単にするのにちょうど必要なものである。2 つ目の積分は、新たに積分計算をしなくても、対称性（symmetry）によって 1 つ目の積分から導かれる。

解答

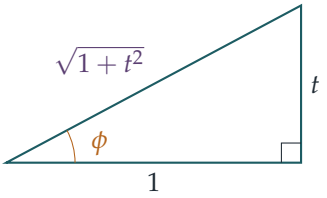
3 つの恒等式

$\phi = \frac{1}{2}\theta$ とおくと、$t = \tan\phi$ かつ $1 + t^2 = \sec^2\phi$ である。倍角の公式（double-angle formulae）により、

$$\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi = 2\tan\phi\cos^2\phi = \frac{2\tan\phi}{\sec^2\phi} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\theta = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi\,(1 - \tan^2\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

（これらは $\tan\frac{1}{2}\theta$ が定義される限り、すなわち $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$ である限り成り立つ。）下の図のように、直角をはさむ 2 辺が 1 と t で角が ϕ である直角三角形を考えると、これらを覚えやすい。



第 3 の恒等式については、$\sin\theta \neq 0$ のとき、$1+\cos\theta = 2\cos^2\phi$ と $\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi$ を用いると、

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi} = \cot\phi = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \phi) = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta),$$

となる。ここで、余角（complementary angles）の関係 $\cot\phi = \tan(\frac{1}{2}\pi - \phi)$ を用いた。以上で 3 つの恒等式がすべて示された。

1 つ目の積分

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ とすると $\theta = 2\arctan t$ であるから、

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\theta = 0$ のとき $t = 0$、$\theta = \frac{1}{2}\pi$ のとき $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$ である。$c = \cos\alpha$、$s = \sin\alpha$ とおく。$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より、どちらも正である。すると

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c\sin\theta} = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2ct}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2ct+1}\,\mathrm{d}t.$$

平方完成し、$1-c^2 = s^2$ を用いると、

$$t^2+2ct+1 = (t+c)^2+s^2.$$

$s > 0$ であるから、よく知られた積分 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s}$ により、

$$\int_0^1 \frac{2}{(t+c)^2+s^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\left[\arctan\frac{t+c}{s}\right]_0^1 = \frac{2}{s}\left(\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

考えてみよう $\arctan\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ はどのように簡単にできるか。

ここで前半の結果が真価を発揮する。第 3 の恒等式（θ を α に置き換えたもの）により、$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$ である。ただし、arctan と tan を打ち消し合わせる前に、その角が arctan の値域 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることを確かめなければならない。$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ より $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、確かに

$$\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

同様に、$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$ であり $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$\arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ である。したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\sin\theta} = \frac{2}{\sin\alpha}\left(\left(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha\right) - \left(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha\right)\right) = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha},$$

となり、求める結果が得られた。

2 つ目の積分

$\theta = \frac{1}{2}\pi - u$ と置換する。すると $\cos\theta = \sin u$、$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}u$ であり、積分区間の端 $0, \frac{1}{2}\pi$ が入れ替わることでマイナス符号が打ち消される：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin\alpha\sin u}.$$

次に $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ とおく。すると $\sin\alpha = \cos\beta$ かつ $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ であるから、いま証明した結果を α の代わりに β として適用できる：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos\beta\sin u} = \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

$\sin\beta = \cos\alpha$ であるから、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ に対して

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha}.$$

が結論される。

検算

- $\alpha \to 0$ のとき $\cos\alpha \to 1$ であり、1 つ目の積分は $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta} = 1$ に近づくはずである（置換すると $\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1$ が得られる）。実際、$\alpha/\sin\alpha \to 1$ である。
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき被積分関数（integrand）は 1 に近づくので、1 つ目の積分は $\frac{1}{2}\pi$ に近づくはずであり、これは $\frac{\pi/2}{1}$ と一致する。2 つ目の積分も同様に $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき 1 に近づき、$\frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha} \to 1$ と整合する。
- 数値的にも確かめられる。$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ のとき、シンプソンの公式（Simpson's rule）により 1 つ目の積分は 1.110721 となり、$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1.110721$ と一致する。$\alpha = \frac{1}{3}\pi$ のとき、2 つ目の積分は $1.047198 \approx \frac{1}{3}\pi$ となり、公式の予想どおりである。

よくある間違い

- $\mathrm{d}\theta$ から生じる因子 $\frac{2}{1+t^2}$ や、新しい積分区間の端 0 と 1 を忘れる。

- x が $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていることを確かめずに $\arctan(\tan x) = x$ と書く。この問題では、条件 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ こそがこれを正当化している。
- $\theta \mapsto \frac{1}{2}\pi - \theta$ と $\alpha \mapsto \frac{1}{2}\pi - \alpha$ を利用せず、2 つ目の積分のために積分計算を一からやり直す。

STEP のその先へ

$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ による置換（ワイエルシュトラス（Weierstrass）置換（Weierstrass substitution）と呼ばれることもある）がうまくいくのは、点 $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ が単位円（unit circle）の有理パラメータ表示（rational parametrisation）になっているからである。t を有理数にとると、すべてのピタゴラス数（Pythagorean triple）が得られる。大学では、$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ の形の積分は、ふつう代わりに $z = e^{i\theta}$ とおいて留数定理（residue theorem）を用いて計算する。これにより、計算は単位円の内部にある極（pole）を求める問題に帰着される。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この考え方への美しい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。