解答例

STEP II 2000、第 4 問

純粋数学 ・ 偏角と逆正接関数の恒等式

> **STEP II 2000、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q4

鍵となる考え方

最初の二つの結果は、複素数（complex number）を掛け合わせるとその偏角（argument）が足し合わされる、ということを述べている。したがって、「逆正接（arctangent）の和 $= \pi/4$」という形の等式は、実は $5-\mathrm{i}$ や $1+\mathrm{i}$ のようなガウス整数（Gaussian integer）の積についての主張なのである。$a > 0$ である各因数 $a+b\mathrm{i}$ は角 $\arctan(b/a)$ を与え、$\pi/4$ は直線 $y = x$ 上にある任意の数の偏角である。なすべきことは、慎重に展開し、そのうえで角が 2π の倍数の違いを除いて等しいだけでなく、本当に等しいことを確かめることである。

解答

積の公式とド・モアブルの定理

展開して $\mathrm{i}^2 = -1$ を用いると、

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi) &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ &= \cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi),\end{aligned}$$

となる。ここで $\cos(A+B)$ と $\sin(A+B)$ の加法定理（compound-angle formulae）を用いた。

二つ目の結果は n についての数学的帰納法（induction）で示す。$n = 1$ のとき、両辺はともに $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ である。$n = k$ のとき結果が成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ &= \cos(k\theta+\theta) + \mathrm{i}\sin(k\theta+\theta),\end{aligned}$$

となる。ここでは帰納法の仮定（induction hypothesis）を用い、続いて $\phi = k\theta$ として積の公式を用いた。よって $n = k+1$ のときも結果は成り立ち、したがってすべての正の整数 n について成り立つ。

$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ を $\operatorname{cis}\theta$ と書くと便利である。すると、$\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}\phi = \operatorname{cis}(\theta+\phi)$ および $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$ が示されたことになる。

角についての事実

$a > 0$ かつ b が実数ならば、

$$a + b\mathrm{i} = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{cis}(\arctan(b/a)),$$

が成り立つ。なぜなら、角 $\alpha = \arctan(b/a)$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ に属するので $\cos\alpha > 0$ であり、さらに $\tan\alpha = b/a$ である。これらから $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$ および $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$ が導かれるからである。

また、$R, R' > 0$ として $R\operatorname{cis}S = R'\operatorname{cis}T$ ならば、絶対値（modulus）をとると $R = R'$ となるので、$\cos S = \cos T$ かつ $\sin S = \sin T$ であり、したがって $S - T$ は 2π の倍数である。

一つ目の等式

$\alpha = \arctan\frac{1}{5}$ とおく。すると $5 - \mathrm{i} = \sqrt{26}\operatorname{cis}(-\alpha)$ かつ $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ であるから、上の結果より

$$(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 26\sqrt{2}\,\operatorname{cis}(\tfrac{\pi}{4} - 2\alpha).$$

一方、直接展開すると

$$(5-\mathrm{i})^2 = 24 - 10\mathrm{i}, \qquad (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 24 + 24\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 10 = 34 + 14\mathrm{i},$$

であり、$\beta = \arctan\frac{14}{34} = \arctan\frac{7}{17}$ として $34 + 14\mathrm{i} = \sqrt{1352}\operatorname{cis}\beta$ である。両者を比べると、$\frac{\pi}{4} - 2\alpha$ と β の差は 2π の倍数である。

> **考えてみよう** その 2π の倍数が 0 であることは、どうしてわかるのだろうか？

両方の角の範囲を絞り込む。$0 < \frac{1}{5} < 1$ であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ であり、したがって $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$ である。また $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ である。$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ に属する二つの角の差は 2π より小さいので、その倍数は 0 であり、$\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$ となる。すなわち

$$\arctan\tfrac{7}{17} + 2\arctan\tfrac{1}{5} = \frac{\pi}{4},$$

が示された。

二つ目の等式

同じ考え方から、偏角が左辺に一致するはずの $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$ を調べればよいとわかる。順に掛けていくと、

$$\begin{aligned}(4+\mathrm{i})^2 &= 15+8\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3 &= (15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 52+47\mathrm{i},\\ (4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i}) &= (52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i}) = 993+992\mathrm{i}.\end{aligned}$$

これはすでに直線 $y=x$ に非常に近く、最後の因数で仕上がる。

$$\begin{aligned}(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i}) &= (993\times 1985-992)+(993+992\times 1985)\mathrm{i}\\ &= 1970113+1970113\,\mathrm{i} = 1970113\sqrt{2}\,\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(1985 がどこから来たのか疑問に思ったなら、$(993+992\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ の実部と虚部が等しくなるように要請すると $993a-992=992a+993$ となり、$a=1985$ が得られる。)

ここで $p=\arctan\frac{1}{4}$、$q=\arctan\frac{1}{20}$、$r=\arctan\frac{1}{1985}$ とおく。角についての事実により、$4+\mathrm{i}$、$20+\mathrm{i}$、$1985+\mathrm{i}$ はそれぞれ $\operatorname{cis}p$、$\operatorname{cis}q$、$\operatorname{cis}r$ の正の実数倍であるから、その積は $\operatorname{cis}(3p+q+r)$ の正の実数倍である。上の式と比べると、$3p+q+r-\frac{\pi}{4}$ は 2π の倍数である。

p,q,r はいずれも正接が $(0,1)$ に属するので $(0,\frac{\pi}{4})$ に属し、したがって $0<3p+q+r<\frac{5\pi}{4}$ である。よって $3p+q+r$ と $\frac{\pi}{4}$ の差は 2π より小さく、その倍数は 0 であり、

$$3\arctan\tfrac{1}{4}+\arctan\tfrac{1}{20}+\arctan\tfrac{1}{1985}=\frac{\pi}{4}.$$

検算

絶対値は一致しなければならない。実際、$|34+14\mathrm{i}|^2=1156+196=1352=26^2\times 2$ であり、そのとおりになっている。二つ目の積については、$17^3\times 401\times(1985^2+1)$ が 2×1970113^2 に等しくなるはずであり、実際に等しい。数値的にも、電卓で計算すると両方の左辺は $0.785398163\ldots=\pi/4$ となる。たとえば $\arctan\frac{7}{17}\approx 0.390607$ であり、$\frac{\pi}{4}-2\arctan\frac{1}{5}\approx 0.390607$ である。

よくある間違い

- $2\pi k$ の差の可能性を排除せずに、複素数が等しいことから角が等しいと結論してしまう。範囲についての議論は、証明の本質的な一部である。
- $(5-\mathrm{i})^2$ における符号の誤り。これは $24-10\mathrm{i}$ であり、$5-\mathrm{i}$ は $-\arctan\frac{1}{5}$ を与える。そのために、逆正接が反対側の辺に正の符号で現れるのである。

▶ 大きな積での計算間違い。上で行ったように、絶対値で検算するとよい。

STEP のその先へ

このような等式はマチン型公式（Machin-type formulae）と呼ばれる。ジョン・マチン（John Machin）の公式 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ は、$(5+\mathrm{i})^4(239-\mathrm{i})$ から同じ方法で得られるものであり、1706 年に π を小数点以下 100 桁まで計算するのに用いられた。その背後にある構造はガウス整数環 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ の算術であり、そこではガウス素数（Gaussian primes）への素因数分解の一意性（unique factorisation）によって、どのような等式が存在しうるかが説明される。回転としての乗法の幾何学については Needham, *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）を、ガウス整数については Davenport, *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。