解答例

STEP II 2000、第 3 問

純粋数学 • 誤差の伝播

> **STEP II 2000、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q3

鍵となる考え方

余弦定理（cosine rule）により a^2 は b, c, A を用いて正確に表される。したがってこの問題の要点は、これらをそれぞれわずかに動かしたときに a がどう変化するかにある。各要素を微小量について 1 次まで展開し、微小量どうしの積を捨て、最後に $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ を用いて平方根をとる。範囲については、η が独立な誤差の線形結合（linear combination）であることに注目する。各項を都合のよい符号で極端な値まで押しやったとき、それは最大となる。

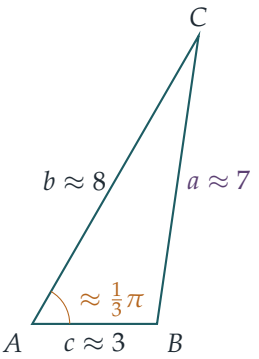
解答

a の近似

摂動を加える前の値 $b = 8, c = 3, A = \frac{1}{3}\pi$ に対して、余弦定理より

$$a^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 49,$$

であるから $a = 7$ である。これが主要項の由来である。



次に摂動（perturbation）を加える。以下を通して、「≈」は $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ について 1 次の項を残し、ϵ_1^2 や $\epsilon_2\epsilon_3$ のような 2 次以上の項をすべて捨てることを意味する。すると

$$\begin{aligned} b^2 &= 64 + 16\epsilon_1 + \epsilon_1^2 \approx 64 + 16\epsilon_1, \\ c^2 &= 9 + 6\epsilon_2 + \epsilon_2^2 \approx 9 + 6\epsilon_2, \\ bc &= 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2. \end{aligned}$$

となる。角については、加法定理（compound-angle formula）と微小角の近似 $\cos\epsilon_3 \approx 1$, $\sin\epsilon_3 \approx \epsilon_3$ により

$$\cos A = \cos\tfrac{1}{3}\pi\cos\epsilon_3 - \sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\epsilon_3 \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3.$$

を得る。（$\cos\epsilon_3 \approx 1$ の誤差は ϵ_3^2 の程度なので、この次数では確かに無視できる。）展開し、再び微小量どうしの積を捨てると

$$2bc\cos A \approx 2(24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3\right) \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3.$$

となる。これらを余弦定理に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 &\approx (64 + 16\epsilon_1) + (9 + 6\epsilon_2) - (24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3) \\ &= 49 + 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3. \end{aligned}$$

である。$\delta = 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3$ とおくと、これは微小量である。$a > 0$ であるから

$$a = \sqrt{49 + \delta} = 7\left(1 + \frac{\delta}{49}\right)^{1/2} \approx 7\left(1 + \frac{\delta}{98}\right) = 7 + \frac{\delta}{14},$$

となる。ここで、微小な x に対する二項展開（binomial expansion）$(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ を用いた。よって $a \approx 7 + \eta$ であり、

$$\eta = \frac{13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3}{14},$$

となる。これが求める結果である。

考えてみよう 積を手で展開せずに済ませることはできなかっただろうか。

できる。$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ を微分すると $2a\,\delta a = (2b - 2c\cos A)\,\delta b + (2c - 2b\cos A)\,\delta c + 2bc\sin A\,\delta A$ を得る。$a = 7, b = 8, c = 3, A = \frac{1}{3}\pi$ においてこれは $14\,\delta a = 13\,\delta b - 2\,\delta c + 24\sqrt{3}\,\delta A$ となり、1 行で同じ答えが得られる。どちらの方法も、要するに 1 次のテイラー展開（Taylor expansion）にすぎない。

η の範囲

ϵ_2 の上界は問題用紙に $4\cdot 9\times 10^{-2}$ と印刷されているが、これは小数点を高い位置に書く旧式の表記であり、$|\epsilon_2| \le 4.9\times 10^{-2}$ を意味する。

3 つの誤差は独立に変化するので、三角不等式（triangle inequality）より

$$|\eta| \le \frac{13|\epsilon_1| + 2|\epsilon_2| + 24\sqrt{3}\,|\epsilon_3|}{14} \le \frac{13\times 2\times 10^{-3} + 2\times 4.9\times 10^{-2} + 24\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 10^{-3}}{14}.$$

である。分子は $0.026 + 0.098 + 0.072 = 0.196$ であるから

$$|\eta| \le \frac{0.196}{14} = 0.014.$$

となる。この上界は実際に達成される。$\epsilon_1 = 2\times 10^{-3}, \epsilon_2 = -4.9\times 10^{-2}, \epsilon_3 = \sqrt{3}\times 10^{-3}$ とすると η のすべての項が正かつ最大となり、$\eta = 0.014$ を得る。3 つの符号をすべて反転すれば $\eta = -0.014$ となる。η は誤差の連続な（実際には線形な）関数であり、許される誤差の集合は直方体であるから、その間のすべての値もとる。したがって範囲は

$$-0.014 \le \eta \le 0.014,$$

である。すなわち、a はおよそ 7 ± 0.014 の範囲にある。

検算

- 誤差がすべてゼロのとき、三角形の辺は 8, 3, 7 で 60° の角をもち、確かに $64 + 9 - 24 = 49$ である。
- 上の極端な誤差をとって余弦定理を正確に用いると $a \approx 7.0141$ および $a \approx 6.9861$ が得られ、7 ± 0.014 にきわめて近い。わずかなずれは、捨てた 2 次の項によるものである。
- 数値的に求めると、基準値における a の A についての偏導関数（partial derivative）は $2.9692\ldots = 24\sqrt{3}/14$ であり、予想どおりである。

よくある間違い

- 最後の平方根を忘れる。$a^2 \approx 49 + \delta$ から得られるのは $a \approx 7 + \delta/14$ であって、$7 + \delta$ ではない。
- 最大値を求めるのに 3 つの誤差をすべて正にとってしまう。ϵ_2 は負号つきで入るので、η を大きくするには負でなければならない。
- $4 \cdot 9 \times 10^{-2}$ を 36×10^{-2} と読んでしまう。長さ 3 の辺に対して、これはまったく小さな誤差ではない。

STEP のその先へ

これは全微分（total differential）による誤差伝播（error propagation）である。多変数関数 f に対して $\delta f \approx \sum(\partial f/\partial x_i)\,\delta x_i$ であり、最悪の場合は $\sum |\partial f/\partial x_i|\,|\delta x_i|$ となる。大学 1 年次の講義では、これは多変数のテイラーの定理（Taylor's theorem）となり、2 次の剰余項に対する明示的な評価によって、「$\approx$」がどれほど良い近似なのかが正確にわかる。実験科学者は、独立な偶然誤差に対しては、代わりに二乗和の平方根の規則（root-sum-of-squares rule）をよく用いる。Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、剰余項つきのテイラーの定理を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。