解答例

STEP II 2000、第 2 問

純粋数学 • 多項式の重解

> **STEP II 2000、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q2

鍵となる考え方

重複する因数（factor）は微分（differentiation）しても残るが、そのたびに指数が 1 つずつ下がる。したがって、4 乗の因数 $(x-a)^4$ があれば、p とその第 1 次から第 3 次までの導関数（derivative）はすべて a で 0 になる。この六次式（sextic）では、第 3 次導関数はただの三次式（cubic）であり、その根から a の候補がごくわずかに絞られる。それらを順に調べ、最後に k を決める。k は微分した瞬間に消えてしまうからである。

解答

最初の結果

$(x-a)^2$ が因数であると仮定する。すなわち、ある多項式（polynomial）q を用いて $\mathrm{p}(x) = (x-a)^2\,\mathrm{q}(x)$ と書ける。積の微分法（product rule）により、

$$\mathrm{p}'(x) = 2(x-a)\,\mathrm{q}(x) + (x-a)^2\,\mathrm{q}'(x) = (x-a)[\,2\mathrm{q}(x) + (x-a)\mathrm{q}'(x)\,].$$

$x = a$ を代入すると $\mathrm{p}'(a) = 0$ となり、示すべきことが得られた。

対応する結果

同じ計算はどの指数に対しても成り立つ。$m \geq 1$ かつ g が多項式であって $\mathrm{f}(x) = (x-a)^m\,\mathrm{g}(x)$ ならば、

$$\mathrm{f}'(x) = (x-a)^{m-1}[\,m\,\mathrm{g}(x) + (x-a)\,\mathrm{g}'(x)\,],$$

であり、括弧の中はやはり多項式である。よって、$(x-a)^m$ が f を割り切るならば、$(x-a)^{m-1}$ は f' を割り切る。

いま、$(x-a)^4$ が $\mathrm{p}(x)$ の因数であるとする。この事実を3回用いると、

$(x-a)^3$ は次を割り切る：$\mathrm{p}'(x)$,　　$(x-a)^2$ は次を割り切る：$\mathrm{p}''(x)$,　　$(x-a)$ は次を割り切る：p

$(x-a)^4$ が $\mathrm{p}(x)$ 自身を割り切ることとあわせて、$x=a$ とおくと

$$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0.$$

k を求める

$\mathrm{p}(x)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+k$ とする。3回微分すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x)&=6x^5+20x^4-20x^3-120x^2-80x+32,\\ \mathrm{p}''(x)&=30x^4+80x^3-60x^2-240x-80=10\,(3x^4+8x^3-6x^2-24x-8),\\ \mathrm{p}'''(x)&=120x^3+240x^2-120x-240=120\,(x^3+2x^2-x-2).\end{aligned}$$

考えてみよう 4つの条件のうち、どれを最初に使うべきだろうか。

最も解きやすいものを使う。定数 k は p''' からは消えており、しかも p''' はただの三次式で、項をまとめることで因数分解できる：

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x-1)(x+1).$$

よって対応する結果により、a は -2、1、-1 のいずれかでなければならない。それぞれを p'' で調べる：

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(1)&=3+8-6-24-8=-27\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-1)&=3-8-6+24-8=5\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-2)&=48-64-24+48-8=0.\end{aligned}$$

残るのは $a=-2$ だけである。これは p' の条件も満たす：

$$\mathrm{p}'(-2)=-192+320+160-480+160+32=0.$$

最後に、$\mathrm{p}(-2)=0$ から k が定まる：

$$\mathrm{p}(-2)=64-128-80+320-160-64+k=k-48=0,\qquad \text{よって}\qquad \boxed{k=48}.$$

考えてみよう ここまでは**必要**条件（necessary condition）しか使っていない。$k=48$ のとき、$(x+2)^4$ が本当に因数であることはどうすればわかるだろうか。

実は、4 つの条件 $\mathrm{p}(a) = \mathrm{p}'(a) = \mathrm{p}''(a) = \mathrm{p}'''(a) = 0$ から $(x-a)^4$ が因数であることが導かれる（多項式に対するテイラー（Taylor）の定理による）。しかし最も手早い確認は、実際に展開してみることである。$(x+2)^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ であるから、商（quotient）は定数項が $48/16 = 3$ のモニック（monic）な二次式でなければならない。x^5 の係数を比較すると $x^2 - 4x + 3$ が得られ、実際に

$$(x+2)^4(x^2 - 4x + 3) = x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48.$$

したがって、$k = 48$ のとき

$$x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48 = (x+2)^4(x-1)(x-3),$$

となり、因数は $a = -2$ として求める形をしている。

検算

- $(x+2)^4(x-1)(x-3)$ をすべて展開する。どの係数も与えられた多項式と一致し、定数項は $16 \times 3 = 48$ である。
- 係数の和を調べる。$\mathrm{p}(1) = 1 + 4 - 5 - 40 - 40 + 32 + 48 = 0$ であり、$(x-1)$ が因数なのでこうならなければならない。
- コンピュータで、ランダムな多項式 $(x-a)^4\mathrm{q}(x)$ について一般的な結果を確かめ、p''' の根 $-2, \pm 1$ を求めて p'' が -2 でのみ 0 になることを確認し、$k = 48$ を得た。

よくある間違い

- $\mathrm{p}(a) = 0$ や $\mathrm{p}'(a) = 0$ から始めてしまう。これらは五次式（quintic）や k そのものを含み、なかなか先に進めない。次数の最も低い導関数から始めること。
- p''' の根を見つけたところで止めてしまう。候補 $a = \pm 1$ は p''' の根ではあるが、p'' の根ではない。
- 対応する結果を「$\mathrm{p}'''(a) = 0$」とだけ述べてしまう。$\mathrm{p}(a) = \mathrm{p}'(a) = \mathrm{p}''(a) = \mathrm{p}'''(a) = 0$ という条件の組全体として述べ、それを証明すること。

STEP のその先へ

逆（converse）も成り立つ。すなわち、$(x-a)^m$ が p を割り切るのは、p とその第 $m-1$ 次までの導関数が a ですべて 0 になるとき、かつそのときに限る。これは、多項式が a のまわりでの自分自身のテイラー展開に等しいからである。大学 1 年の代数の講義で

は、同じ考え方で根の**重複度**（multiplicity）が定義される。また、これは重根（repeated root）の判定法も与える。ユークリッド（Euclid）の互除法（Euclid's algorithm）で $\gcd(p, p')$ を計算すればよい。素数を法とする整数のような体（field）の上では、形式的導関数（formal derivative）は意外な振る舞いをする。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がこの話題を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。