解答例

STEP II 2000、第 11 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

> **STEP II 2000、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q11

鍵となる考え方

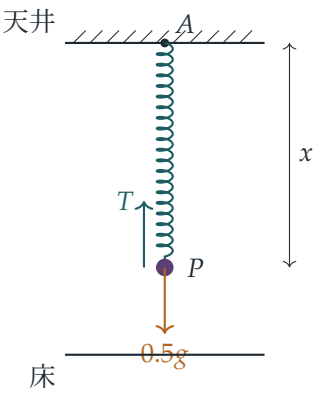
2 つの定性的な主張は、エネルギーを使えばすぐに片づく。放した瞬間に蓄えられている弾性エネルギー（elastic energy）と、自然長（natural length）に達するため、および天井に達するために必要な重力による位置エネルギーとを比べればよい。時間については、運動を 2 つの段階に分ける。糸がぴんと張っている間、質点はその平衡位置（equilibrium position）を中心とする単振動（simple harmonic motion）を行い、糸がたるんでからは重力のみを受けて自由に運動する。戻りの行程は上りの行程を逆向きにたどったものなので、上りにかかる時間を 2 倍すればよい。

解答

P をフックの法則（Hooke's law）に従う軽い弾性糸につながれた質点とみなし、空気抵抗はないものとする。A から下向きに測った P の距離を x（単位はメートル）とする。$x > 1.5$ のとき糸は張っており、そのとき伸びは $x - 1.5$、張力（tension）は

$$T = \frac{\lambda}{l}(x - 1.5) = \frac{5g}{1.5}(x - 1.5) = \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

である。部屋の高さは 2.5 m なので、P は $x = 2$ から、伸び 0.5 m の状態で出発する。



糸がたるむこと

放した瞬間に蓄えられている弾性エネルギーは

$$\frac{\lambda e^2}{2l} = \frac{5g\,(0.5)^2}{2(1.5)} = \frac{5g}{12}\,\mathrm{J}.$$

である。糸が自然長に達するには、P は 0.5 m 上昇しなければならず、位置エネルギー（potential energy）が $0.5g \times 0.5 = \frac{g}{4}$ J 増加する。$\frac{5g}{12} > \frac{g}{4}$ であるから、P はまだ上向きに運動している状態で $x = 1.5$ に達し、そのときの運動エネルギー（kinetic energy）は

$$\tfrac{1}{2}(0.5)v^2 = \frac{5g}{12} - \frac{g}{4} = \frac{g}{6}, \qquad \text{よって} \qquad v^2 = \frac{2g}{3}.$$

である。したがって P は糸が自然長となる点より上へ通り過ぎ、糸はたるむ。

P は天井に届かない

天井に届くためには、P は出発点から 2 m 上昇しなければならず、位置エネルギーが $0.5g \times 2 = g$ J 増加する。利用できるエネルギーは放した瞬間に糸に蓄えられていた $\frac{5g}{12}$ J がすべてであり（糸がたるめば糸は何も蓄えない）、$\frac{5g}{12} < g$ である。よって P は天井に届かない。

より詳しく述べると、糸がたるんだ後の P は速さ v で鉛直に運動する放物体であるから、さらに $\dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{1}{3}$ m 上昇する。最高点は $x = 1.5 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$ であり、天井よりまだ $\frac{7}{6}$ m 下である。

糸が張っている間の単振動

$x > 1.5$ のとき、ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（下向きを正とする）より

$$0.5\,\ddot{x} = 0.5g - \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

を得る。平衡位置は右辺が 0 となるところであり、$x - 1.5 = 0.15$、すなわち $x = 1.65$ である。平衡位置から下向きの変位を $y = x - 1.65$ とおく。すると

$$\ddot{y} = 2g - \frac{20g}{3}(y + 0.15) = -\frac{20g}{3}y,$$

となり、これは $\omega^2 = \dfrac{20g}{3}$ の、$y = 0$ を中心とする単振動である。求められているとおり、これは糸に張力がはたらいている限り成り立つ。

戻るまでの時間

P は $y = 2 - 1.65 = 0.35$ で静止した状態から出発するので、糸が張っている間は

$$y = 0.35\cos\omega t.$$

である。糸がたるむのは $x = 1.5$、すなわち $y = -0.15$ のときである。よって、これが初めて起こる時刻 t_1 は

$$\cos\omega t_1 = -\frac{0.15}{0.35} = -\frac{3}{7}.$$

を満たす。

> **考えてみよう** $\cos\omega t_1 = -\frac{3}{7}$ のどの解が求めるものか。また、それを arccos を用いてどう表すか。

t が 0 から増加するとき ωt も 0 から増加し、$\cos\omega t$ が初めて $-\frac{3}{7}$ に達するのは ωt が $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にあるときである。$\arccos\frac{3}{7} \in (0, \frac{\pi}{2})$ かつ $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ であるから、その値は $\omega t_1 = \pi - \arccos\frac{3}{7}$ である。したがって

$$t_1 = \frac{1}{\omega}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right) = \left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}\right).$$

（確認として、このときの速さは $\omega\sqrt{0.35^2 - 0.15^2} = \sqrt{\frac{20g}{3} \times 0.1} = \sqrt{\frac{2g}{3}}$ であり、エネルギーによる計算と一致する。）

糸がたるんでいる間、P は重力のみを受けて運動する。P は速さ $v = \sqrt{2g/3}$ で上向きに $x = 1.5$ を離れ、同じ速さで下向きに $x = 1.5$ に戻ってくる。それまでの時間は

$$t_2 = \frac{2v}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{2g}{3}} = \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}.$$

である。

位置のみに依存する力のもとでの運動は可逆（reversible）である。離れたときと同じ速さで $x = 1.5$ において糸が張る領域に再び入った P は、単振動の段階を逆向きにた

どり、さらに t_1 をかけて元の位置 $y = 0.35$ で静止する。全体の時間は

$$\begin{aligned} 2t_1 + t_2 &= 2\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7}) + \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2} + \left(\frac{3}{5g}\right)^{1/2}(\pi - \arccos\tfrac{3}{7})\,, \end{aligned}$$

である。ここで $2\sqrt{3/(20g)} = \sqrt{12/(20g)} = \sqrt{3/(5g)}$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- 自然長における速さを求める 2 つの方法（エネルギーによる方法と、単振動の $v^2 = \omega^2(a^2 - y^2)$ による方法）は、どちらも $v^2 = \frac{2g}{3}$ を与える。
- $g = 9.8$ とすると、この式は約 1.0199 s を与える。運動方程式（equation of motion）を数値的に 1 ステップずつ解くと（$x < 1.5$ のときは張力を 0 とする）、出発点で再び静止するまでの時間は同じ値となり、最高点は天井より $\frac{7}{6}$ m 下となる。
- たるむ段階がなければ、単振動の周期は $2\pi/\omega \approx 0.77$ s となる。ここでの $2t_1 \approx 0.50$ s はこれより小さく、振動の一部しか行われないのだから、そうなるべきである。

よくある間違い

- 単振動の中心を平衡位置ではなく自然長の位置としてしまう。重力によって、中心は伸び 0.15 m の位置にずれる。
- $\omega t_1 = \arccos(-\frac{3}{7})$ としたうえで、これが $\pi - \arccos\frac{3}{7}$ であることに気づかない。
- 戻りの行程を忘れる。求められている時間は上りとそして戻りを含むので、両方の段階を 2 倍する必要がある。

STEP のその先へ

これは区分的に定義された力学系（piecewise-defined dynamical system）、すなわち「非滑らかな」（non-smooth）力学系である。領域ごとに異なる運動方程式が成り立ち、解は境界において位置と速度を一致させることによってつなぎ合わされる。同じ考え方は、弾むボール、衝突、スイッチング回路などを支配しており、ここで用いた可逆性の議論は、保存系（conservative system）における時間反転対称性（time-reversal symmetry）を初めて垣間見るものである。さらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。