解答例

STEP II 2000、第 10 問

力学 ・ 連結した滑車系

STEP II 2000、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

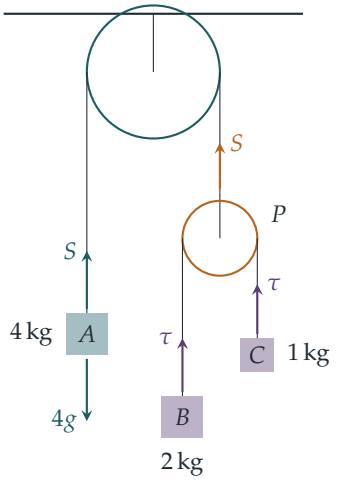
step.maths.org/questions/00-s2-q10

鍵となる考え方

これは二重アトウッドの器械（double Atwood machine）である。A を押さえている間は第 2 の滑車（pulley）は固定されており、B、C は通常のアトウッドの器械（Atwood machine）をなす。A を放すと第 2 の滑車も動き出すので、見通しよく解くには、B と C の運動を**その滑車に対する相対的な運動**として測り、さらに軽い滑車にはたらく力の合力は 0 であるという事実を用いるのがよい。すなわち、滑車の上側の糸は、下側の糸の張力（tension）のちょうど 2 倍の力で引くのである。

解答

粒子を質点（point mass）、糸を軽くて伸び縮みしない（inextensible）もの、2 つの滑車をなめらかで軽いものとしてモデル化する。第 2 の滑車を P とよぶ。加速度（acceleration）はすべて**下向き**を正とし、A を通る糸の張力を S、BC の糸の張力を τ と書き、g の単位は $\mathrm{m\,s^{-2}}$ とする。



P は軽いので、P にはたらく力の合力は 0 でなければならない（そうでなければ加速度が無限大になってしまう）。P は上向きに S で引かれ、両側で下向きに τ ずつ引かれるから、常に

$$S = 2\tau$$

が成り立つ。

第 1 段階：A を押さえている間

A が静止しているとき、固定滑車にかかる糸は動かないので、P も固定されている。このとき B と C は通常のアトウッドの器械であり、B が下向きに加速度 a で動けば、C は上向きに加速度 a で動く。ニュートンの第 2 法則（Newton's second law）より

$$2a = 2g - \tau, \qquad 1 \cdot a = \tau - g.$$

辺々を加えると $3a = g$ となるので

$$a = \tfrac{1}{3}g, \qquad \tau = \tfrac{4}{3}g.$$

よって B は下向きに、C は上向きに、それぞれ $\frac{1}{3}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ の加速度で動く。

この段階の終わり（$t = T$）において、B は下向きに、C は上向きに、いずれも速さ $\frac{1}{3}gT$ で動いており、B は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}g\,T^2 = \frac{1}{6}gT^2$ だけ落下している。この間、A と P は静止したままである。

第 2 段階：すべてが自由に動く

A の加速度を a_A（下向き）とする。固定滑車にかかる糸の長さは一定なので、P の加速度は $-a_A$ である。つまり P は、A が下がるのと同じ速さで上がる。

考えてみよう B と C がつり下がっている滑車そのものが加速しているとき、B と C の加速度はどのように記述すればよいか。

P に対して見れば、糸 BC は固定されたアトウッドの器械の場合とまったく同じようにふるまう。すなわち、B が P に対して下向きに加速度 r で動けば、C は P に対して上向きに加速度 r で動く。これに P 自身の加速度を加えて

$$a_B = -a_A + r, \qquad a_C = -a_A - r.$$

ここで、$S = 2\tau$ を用いて各粒子についてニュートンの第 2 法則を書く（下向きを正とする）：

$$\begin{aligned} A:&\quad 4a_A = 4g - 2\tau,\\ B:&\quad 2(-a_A + r) = 2g - \tau,\\ C:&\quad 1(-a_A - r) = g - \tau. \end{aligned}$$

A の式から $\tau = 2g - 2a_A$ である。これを B の式に代入すると $-2a_A + 2r = 2a_A$ となり、$r = 2a_A$ を得る。これらを両方とも C の式に代入すると

$$-3a_A = g - (2g - 2a_A) = -g + 2a_A \quad \Longrightarrow \quad a_A = \tfrac{1}{5}g.$$

したがって $r = \frac{2}{5}g$、$\tau = \frac{8}{5}g$、$S = \frac{16}{5}g$ であり、

$a_A = \frac{1}{5}g$（下向き），　$a_B = -\frac{1}{5}g + \frac{2}{5}g = \frac{1}{5}g$（下向き），　$a_C = -\frac{1}{5}g - \frac{2}{5}g = -\frac{3}{5}g$,

となるので、C は**上向き**に $\frac{3}{5}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ の加速度で動く。

これらはいずれも一定であり、A を放した瞬間に不連続に変化するものはない。A と P は静止状態から動き出し、B、C は速さ $\frac{1}{3}gT$ を保っている。

A の速さ

第 1 段階で B は $\frac{1}{6}gT^2$ だけ動いたので、残りの距離は

$$0.6\,gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{3}{5}gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{13}{30}gT^2$$

である。第 2 段階で B は下向きの速度 $\frac{1}{3}gT$ から出発し、下向きの加速度 $\frac{1}{5}g$ をもつので、速度は正のままであり、移動距離は変位（displacement）に等しい。これに時間 t を要するとすれば、$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ より

$$\tfrac{1}{3}gT\,t + \tfrac{1}{10}gt^2 = \tfrac{13}{30}gT^2.$$

$t = kT$ とおき、両辺に $30/(gT^2)$ を掛けると

$$3k^2 + 10k - 13 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (k-1)(3k+13) = 0.$$

$t > 0$ より $k = 1$ であり、第 2 段階はちょうど T 秒間続く。A はこの段階を静止状態から加速度 $\frac{1}{5}g$ で始めたので、そのときの速さは

$$v_A = \tfrac{1}{5}g \cdot T = \tfrac{gT}{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

検算

- 求めた値で各運動方程式が成り立つ。A については $4 \cdot \frac{1}{5}g = 4g - \frac{16}{5}g$、$C$ については $-\frac{3}{5}g = g - \frac{8}{5}g$ である。
- 別の方法による確認：糸の条件から $y_C = $ 定数 $- 2y_A - y_B$（下向きの位置）が成り立ち、2 つの自由な座標 y_A、y_B を用いてエネルギーの方法で解いても、同じく $a_A = a_B = \frac{1}{5}g$、$a_C = -\frac{3}{5}g$ が得られる。
- $g = 9.8$、$T = 1.7$ として運動を数値的に追跡すると、$t = 3.400$（すなわち $2T$）で B は $0.6gT^2$ だけ移動しており、そのとき A の速さは $3.332 = gT/5$ である。
- 重さの合計は $7g$ であるが、固定滑車が支えるのは $2S = \frac{32}{5}g$ だけで $7g$ より小さい。したがって第 2 段階では系の重心（centre of mass）が下向きに加速するはずであり、実際そうなっている。

よくある間違い

- 第 2 段階でも P を固定されているものとして扱い、B と C に $\pm\frac{1}{3}g$ をそのまま使ってしまう。
- 軽い滑車では $S = 2\tau$ となることを忘れる、あるいは滑車に質量の項を与えてしまう。
- すでに進んだ $\frac{1}{6}gT^2$ を差し引かずに、$0.6gT^2$ 全体を第 2 段階の距離としてしまう。

STEP のその先へ

2 つ目の検算のように、糸による束縛条件（constraint）を自動的に満たす位置座標を選ぶことは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギー（potential energy）を自由な座標で表せば、張力を一切持ち出すことなく運動方程式が導かれる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、滑車のような束縛のある系を丁寧に扱っており、次に読む本として適している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。