解答例

# STEP II 2000、第 1 問

純粋数学 ・ エジプト分数

> **STEP II 2000、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q1

## 鍵となる考え方

2 つの例には共通のパターンがある。1 つ目の分母は $N$ より 1 大きく、2 つ目の分母は $N$ とその数の積である。一意性を示す部分では、分母を払って「長方形を完成させる」（completing the rectangle）ことにより、$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{N}$ を、積が $N^2$ に等しい 2 つの整数の積の形に変形する。素数の 2 乗の因数分解（factorisation）はごくわずかしかないので、$a$ と $b$ の候補もごくわずかであり、それらを単純に列挙すればよい。

## 解答

### 一般的な結果

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ と $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ において、分母は $N+1$ と $N(N+1)$ である（$6=2\times3$、$12=3\times4$ だからである）。そこで次のように予想する。

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}.$$

これを証明するには、右辺を通分すればよい。

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}=\frac{N+1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}.$$

どちらの分母も 1 より大きい整数なので、両方の項は単位分数（unit fraction）である。また $N>1$ のとき $N(N+1)>N+1$ なので、2 つは相異なる。したがって、すべての単位分数は相異なる 2 つの単位分数の和として表せる。

### $N$ が素数のときの一意性

$\frac{1}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ の両辺に $abN$ を掛けると $ab = Nb + Na$、すなわち

$$ab - Na - Nb = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ab - Na - Nb + N^2 = N^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-N)(b-N) = N^2.$$

を得る。各段階は可逆である（$a$、$b$、$N$ は 0 でないから）ので、$(*)$ の解はちょうど $(a-N)(b-N) = N^2$ の解と一致する。

**考えてみよう** $a - N$ と $b - N$ がともに負になることはありうるか？

ありえない。$\frac{1}{b} > 0$ なので $\frac{1}{a} < \frac{1}{N}$ であり、よって $a > N$ である。同様に $b > N$ である。したがって $a - N$ と $b - N$ は積が $N^2$ となる**正の**整数である。（注意しておく価値がある。これがなければ、組 $(-1, -N^2)$ も除外すべき因数分解として残ってしまう。）

ここで $N = p$ を素数（prime）とする。$p^2$ の正の約数（divisor）は 1、$p$、$p^2$ のみなので、組 $(a-p, b-p)$ は次のいずれかでなければならない。

$$(1,\, p^2), \qquad (p,\, p), \qquad (p^2,\, 1).$$

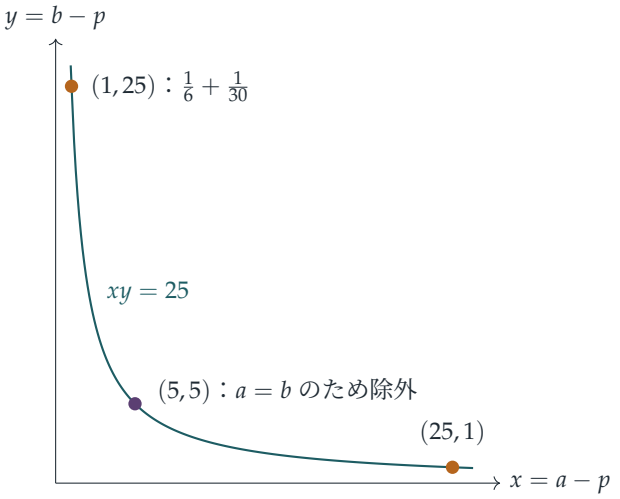
- $(p, p)$ からは $a = b = 2p$、すなわち $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$ が得られる。2 つの単位分数は相異なっていないので、これは除外される。
- $(1, p^2)$ からは $a = p + 1$、$b = p^2 + p = p(p+1)$ が得られ、これは上で求めた表し方である。$(p^2, 1)$ は同じ組を逆の順に並べたものである。

したがって、2 つの項の順序を除けば、表し方は

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)},$$

のみであり、題意が示された。

その理由は図を見るとわかる。$x = a - p$、$y = b - p$ とおくと、解は第 1 象限にある双曲線（hyperbola）$xy = p^2$ 上の格子点（lattice point）である。ここでは $p = 5$ としている。




### $2/N$ の形の分数

次に、$N = p$ を奇素数として $\frac{2}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ とする。両辺に $abp$ を掛けると $2ab = pa + pb$ を得る。長方形を完成させるために、まず 2 を掛ける。

$$4ab - 2pa - 2pb = 0 \iff 4ab - 2pa - 2pb + p^2 = p^2 \iff (2a - p)(2b - p) = p^2.$$

**考えてみよう** 因数分解の前に、なぜ 2 を掛けるのか？

$2ab - pa - pb$ を直接因数分解しようとすると $(a - \frac{p}{2})$ のような項が必要になり、これは整数ではない。2 を掛けておけばすべてが整数のまま保たれるので、因数 $2a - p$ と $2b - p$ は整数となり、整除性を利用できる。

先ほどと同様に $\frac{1}{a} < \frac{2}{p}$ なので $2a > p$ であり、$2a - p > 0$ である。同様に $2b - p > 0$ である。$p^2$ の正の約数は 1、$p$、$p^2$ なので、$(2a - p, 2b - p)$ は次のいずれかである。

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

- $(p, p)$ からは $a = b = p$、すなわち $\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$ が得られる。相異なっていないので除外される。
- $(1, p^2)$ からは
$$a = \frac{p+1}{2}, \qquad b = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$
が得られる。$p$ は奇数なので $p + 1$ は偶数であり、どちらも整数である。$p \geq 3$ なので $a \geq 2$ であり、どちらも 1 より大きい。また $b = pa > a$ なので、2 つは相異なる。$(p^2, 1)$ の場合は同じ組を逆の順に並べたものである。

直接確かめると、

$$\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p(p+1)}=\frac{2(p+1)}{p(p+1)}=\frac{2}{p}.$$

となる。したがって $\frac{2}{p}$ は相異なる 2 つの単位分数の和として表すことができ、（順序を除いて）表し方は

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)}+\frac{1}{\frac{1}{2}p(p+1)},$$

のみである。これで最後の結果が証明された。

## 検算

- $p=3$：$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$。$p=5$：$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$。$p=7$：$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$。
- $N<300$ のすべてについてコンピュータで探索したところ、すべての素数 $N$ について $\frac{1}{N}$ の表し方はちょうど 1 通り、すべての奇素数 $N$ について $\frac{2}{N}$ の表し方はちょうど 1 通りであり、上の公式と一致した。
- 素数であることは本当に重要である。$N=6$ の場合は 4 通りあり、たとえば $\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ である。これらは因数分解 $36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9$ にそれぞれ対応している（組 $6\times6$ からは $a=b$ が得られる）。
- $p>2$ である理由：$p=2$ のとき、$\frac{2}{2}=1$ は相異なる $a,b>1$ を用いて $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ の形に表すことはできず、実際 $(p+1)/2$ は整数ではない。

## よくある間違い

- $a-N>0$ と $b-N>0$ を示し忘れ、その結果 $N^2$ の負の因数分解を見落とすこと。
- 等しい単位分数を与える因数分解 $N\times N$ を除外しないこと。
- $2/N$ の場合に、$\frac{1}{2}(p+1)$ が整数であることを確かめないこと（ここがまさに $p\neq2$ が使われる箇所である）。

## STEP のその先へ

分数を相異なる単位分数の和として書き表すことは古代エジプト人にまでさかのぼり、「エジプト式分数」（Egyptian fractions）には今なお未解決問題がある。エルデシュ–シュトラウス予想（Erdős–Straus conjecture）は、$N\geq2$ に対して $\frac{4}{N}$ は常に 3 つの単位分数の和として表せると主張するが、誰も証明できていない。$xy-Nx-Ny=0$

を $(x-N)(y-N) = N^2$ に変形する技法はディオファントス方程式（Diophantine equation）の標準的な道具であり、解の個数を数えることは約数の個数を数えることに帰着する。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、約数と素数の世界へ進む次の一歩として素晴らしい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。