解答例

STEP I 2000、第 9 問

力学 ・ 加速度系における放物運動

> **STEP I 2000、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q9

鍵となる考え方

到達距離（range）は**客車の中で**測るので、客車に固定した座標系（frame）で考える。客車は北向きに加速度（acceleration）a で加速しているから、床に対する砲弾の加速度は、下向きの g に南向きの a を加えたものになる。南向きはちょうど大砲が発射する向きである。運動は依然として一定の加速度をもつ放物運動（projectile motion）であり、水平方向の項が一つ加わるだけである。到達距離を 2θ を用いて表してしまえば、その最大化は一行の微分で済む。

解答

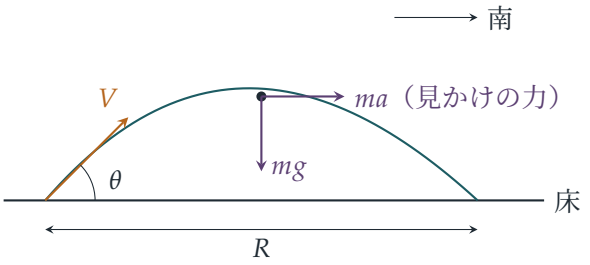
客車内での到達距離

砲弾を質点（particle）とみなし、空気抵抗（air resistance）は無視する。砲弾は床の高さから発射されて床に落ち、客車は砲弾が車内に着地するのに十分な長さをもつと仮定する。x 軸を水平に南向き（発射方向）に、y 軸を鉛直上向きにとり、いずれも客車に対して測る。

地面に固定した座標系では、砲弾の加速度は下向きに g で、水平方向の加速度はない。客車の加速度は北向きに a である。よって、**客車に対する**砲弾の加速度は

$$\ddot{x} = 0 - (-a) = a, \qquad \ddot{y} = -g.$$

となる。同じことであるが、客車の座標系では、質量 m の砲弾に重力に加えて南向きの見かけの力（apparent force）ma がはたらく。



客車に対する初速度は、南向きに $V\cos\theta$、上向きに $V\sin\theta$ であるから、

$$x = Vt\cos\theta + \tfrac{1}{2}at^2, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

鉛直方向の運動は a の影響を受けない。砲弾は $t > 0$ で $y = 0$ となるとき、すなわち $T = \dfrac{2V\sin\theta}{g}$ で着地する。したがって、客車内での到達距離は

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{a}{2}\cdot\frac{4V^2\sin^2\theta}{g^2} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right), \end{aligned}$$

である。ここで $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ と $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ を用いた。

到達距離の最大化

θ で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2V^2}{g}\left(\cos 2\theta + \frac{a}{g}\sin 2\theta\right),$$

となり、これが 0 になるのは

$$\boxed{\tan 2\theta = -\frac{g}{a}.}$$

のときである。

考えてみよう 正接が負？　どこかで間違えたのだろうか？

そうではない。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < 2\theta < \pi$ であり、$\tan 2\theta < 0$ は単に 2θ が $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にあること、つまり $\theta > \frac{\pi}{4}$ であることを意味する。これは理にかなっている。余分な押し a は砲弾が空中にある間ずっとはたらくので、45° より少し高く撃って滞空時間を稼ぐほうが得なのである。$a = 0$ なら $\cos 2\theta = 0$ となり、おなじみの $\theta = \frac{\pi}{4}$ が得られる。

これが最大値であることを確かめるために、$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ として $\tan\varphi = \dfrac{a}{g}$ とおく。すると

$$\sin 2\theta - \frac{a}{g}\cos 2\theta = \frac{\sin(2\theta - \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a}{g}\right).$$

これが最大になるのは $2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$、すなわち $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$ のときであり、これは $\tan 2\theta = -g/a$ の $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ における解である。よって最適な角度は厳密に

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{g},$$

であり、$\cos\varphi = g/\sqrt{g^2+a^2}$ であるから、最大到達距離は厳密に

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{g} + \frac{a}{g}\right) = \frac{V^2}{g^2}\left(a + \sqrt{g^2+a^2}\right).$$

となる。

a が小さい場合

u が小さいとき、$\arctan u = u + O(u^3)$ である。$u = a/g$ とすると

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{g} + O\left(\frac{a^3}{g^3}\right)\right) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g},$$

となり、求める結果が得られる。到達距離については、$\sqrt{g^2+a^2} = g\sqrt{1+a^2/g^2} = g + O(a^2/g)$ であるから

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g^2}(a + g + O(a^2/g)) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2},$$

となり、これが二つ目の求める結果である。どちらの近似も a/g について一次（first order）まで正しく、無視した項は $(a/g)^2$ 以下の大きさである。

$\tan 2\theta$ のまま扱いたければ、$2\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ とおけばよい。すると $\tan 2\theta = -\cot\varepsilon \approx -1/\varepsilon$ であるから $\varepsilon \approx a/g$ となる。$\sin 2\theta = \cos\varepsilon \approx 1$ と $\cos 2\theta = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon$ を R に代入すると、一次までで $R \approx \frac{V^2}{g}(1 + \frac{a}{g})$ が得られる。

検算

- $a = 0$：公式は $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $R_{\max} = V^2/g$ に帰着し、水平な地面での標準的な結果と一致する。
- 次元（dimensions）：a/g は無次元で、V^2/g は長さであり、そうなるべきとおりである。
- 数値的に、$V = 7$、$g = 9.8$、$a = 1.3$ として地面の座標系で運動を刻みながら計算し、客車の位置を差し引くと、R の公式が再現される（例えば $\theta = 0.7$ で $R \approx 5.478$）。いくつかの無作為な a について θ を総当たりで探索すると、最大値は $\tan 2\theta = -g/a$ のところで見つかり、$R_{\max}$ は $\frac{V^2}{g^2}(a + \sqrt{g^2+a^2})$ と有効数字（significant figures）10 桁まで一致した。$a = 0.05$ のとき、厳密な最適角 $0.787949\ldots$ は $\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g}$ と小数第 7 位まで一致する。

よくある間違い

- a の符号を間違える。客車は砲弾の発射方向とは**逆向きに**加速するので、床に対して砲弾は南向きに速さを増す。項 $\frac{1}{2}aT^2$ は引くのではなく足すのである。
- 到達距離を客車内ではなく地面で測ってしまう。問題が求めているのは客車の床に沿った距離である。
- 電卓で $2\theta = \arctan(-g/a)$ とすると負の角が得られてしまう。正しい解は $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ にある。

STEP のその先へ

加速する座標系で考え、見かけの力 $-m\mathbf{a}$ を加えるのは、**慣性力**（fictitious force）の最も簡単な例である。回転座標系では、同じようにして遠心力（centrifugal force）とコリオリ（Coriolis）の力が現れる。ここでは見かけの力によって「有効重力」（effective gravity）が傾き、その大きさが $\sqrt{g^2+a^2}$ になるだけである。これは答えに $\sqrt{g^2+a^2}$ が現れる理由の一つの見方である。非慣性系（non-inertial frame）については Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）にわかりやすく書かれている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。