解答例

STEP I 2000、第 8 問

純粋数学 • 絶対値の積分

> **STEP I 2000、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q8

鍵となる考え方

積分の中に絶対値（modulus）記号があるときは、絶対値の中の式の符号が変わる点を求めて処理する。符号が変わる点で区切られた各区間では、$|f|$ は f か $-f$ のどちらかであるから、そこで積分範囲を分割し、通常の関数として積分すればよい。本当に手間がかかるのは零点を求める部分だけである。xe^x については見ればわかり、3 次式は因数分解によって、$\sin x + \cos x$ は一つの正弦波の形に書き直すことによって求める。

解答

最初の積分

すべての x に対して $e^x > 0$ であるから、xe^x の符号は x の符号と一致する。したがって、$[-1,0]$ 上では $xe^x \le 0$ であり $|xe^x| = -xe^x$、一方 $[0,1]$ 上では $xe^x \ge 0$ であり $|xe^x| = xe^x$ である。積分範囲を 0 で分割すると、

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-xe^x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} xe^x\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} xe^x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} xe^x\,\mathrm{d}x,$$

となり、これが求める等式である。

値を計算するには、$u = x$、$\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = e^x$ として部分積分（integration by parts）を行う。

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = (x-1)e^x + c.$$

よって

$$\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = [(x-1)e^x]_{-1}^{0} = -1-(-2e^{-1}) = \frac{2}{e}-1,$$
$$\int_{0}^{1} xe^x\,dx = [(x-1)e^x]_{0}^{1} = 0-(-1) = 1.$$

このうち一つ目は負である（そこでは被積分関数が負なので、当然そうなるはずである）。したがって

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,dx = \left(1-\frac{2}{e}\right)+1 = 2-\frac{2}{e}.$$

小問 (i)

$p(x) = x^3-2x^2-x+2$ とおく。項をまとめると、

$$p(x) = x^2(x-2)-(x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x-2).$$

$[0,4]$ における零点は $x=1$ と $x=2$ のみである。最高次の係数が正で、単根 $-1,1,2$ をもつ 3 次関数は、-1 と 1 の間で正、1 と 2 の間で負、2 より先で正である。したがって

$$|p(x)| = \begin{cases} p(x), & 0 \le x \le 1, \\ -p(x), & 1 \le x \le 2, \\ p(x), & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

原始関数（antiderivative）として

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x,$$

をとる。このとき

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}+2 = \tfrac{13}{12},$$
$$F(2) = 4-\tfrac{16}{3}-2+4 = \tfrac{2}{3}, \qquad F(4) = 64-\tfrac{128}{3}-8+8 = \tfrac{64}{3}.$$

考えてみよう なぜ $F(4)-F(0)$ を計算して、その絶対値をとるだけではいけないのだろうか。

絶対値は答えではなく被積分関数に対して適用しなければならないからである。$[1,2]$ 上ではこの 3 次関数は負であり、$F(4)-F(0)$ ではその部分の面積が加えられるのではなく引かれてしまう。そこで三つの部分を別々に扱う。

$$\begin{aligned}\int_{0}^{4} |p(x)|\,dx &= (F(1)-F(0))-(F(2)-F(1))+(F(4)-F(2)) \\ &= \tfrac{13}{12}-(\tfrac{2}{3}-\tfrac{13}{12})+(\tfrac{64}{3}-\tfrac{2}{3}) \\ &= \tfrac{13}{12}+\tfrac{5}{12}+\tfrac{62}{3} = \tfrac{3}{2}+\tfrac{62}{3} = \frac{133}{6}.\end{aligned}$$

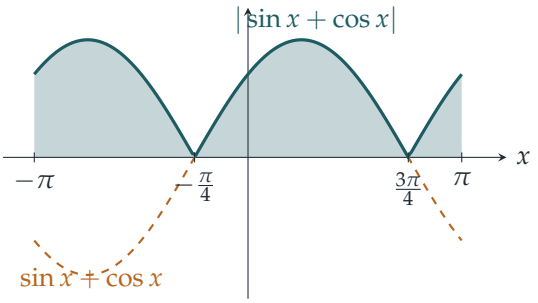
各括弧の値は、あるべき通りすべて正である。$\frac{13}{12}$、$\frac{5}{12}$、$\frac{62}{3}$ が三つの部分それぞれの面積である。（比較のために述べると、$F(4)-F(0)=\frac{64}{3}$ であり、これは $2\times\frac{5}{12}$ だけ小さい。）

小問 (ii)

$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$ を用いると、

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\,\sin(x+\tfrac{\pi}{4}).$$

これは $[-\pi,\pi]$ において $x=-\frac{\pi}{4}$ と $x=\frac{3\pi}{4}$ で 0 になる。$[-\pi,-\frac{\pi}{4}]$ 上と $[\frac{3\pi}{4},\pi]$ 上では負であり、その間では正である。



先ほどと同様に三つの部分に分けることもできるが、もっと手際のよい方法がある。$u=x+\frac{\pi}{4}$ と置換すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4}|\sin u|\,\mathrm{d}u.$$

関数 $|\sin u|$ は周期（period）π をもち、新しい積分範囲の長さは 2π であるから、ちょうど 2 周期分を覆う。周期関数を整数個の周期にわたって積分した値は、どこから始めるかによらないので、

$$\sqrt{2}\int_{-3\pi/4}^{5\pi/4}|\sin u|\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\times 2\int_{0}^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\times 2\times 2=4\sqrt{2}.$$

直接分割する方法を好むなら、$G(x)=\sin x-\cos x$ は $\sin x+\cos x$ の原始関数であり、$G(-\pi)=1$、$G(-\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$、$G(\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}$、$G(\pi)=1$ である。三つの面積は $1+\sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$、$\sqrt{2}-1$ であり、その和は $4\sqrt{2}$ となる。

検算

- 各部分（被積分関数が滑らかな区間）にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、最初の積分について 1.264241 . . . が得られ、$2-2/\mathrm{e}\approx 1.264241$ と一致する。

- (i) については、数値積分により 22.16667 が得られ、$\frac{133}{6}$ と一致する。また、これは $F(4) - F(0) = \frac{64}{3} \approx 21.33$ よりわずかに大きいが、絶対値によって小さな負の面積が正の面積に変わるのだから、そうなるはずである。
- (ii) については、数値積分により 5.656854 が得られ、$4\sqrt{2}$ と一致する。妥当性の確認として、$|\sin x + \cos x|$ は $\sqrt{2}|\sin x|$ と同じ形をしており、その平均値は $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ であるから、$2\pi \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 4\sqrt{2}$ となる。

よくある間違い

- 符号が変わる点をまたいでそのまま積分し、最後に絶対値をとってしまう。これでは負の領域をすべて少なく数えてしまう。
- (i) で $x = 1$ の根を見落とす。常に完全に因数分解するか、少なくとも因数定理（factor theorem）を用いて小さな整数の根を確かめること。
- $\left[(x-1)\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{0}$ での符号の誤り。$x = -1$ での値は $-2\mathrm{e}^{-1}$ であるから、これを引くと $2/\mathrm{e}$ を加えることになる。

STEP のその先へ

積分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ は、曲線と軸の間の面積の総和である。大学では、これは f の L^1 ノルム（L^1 norm）として再び現れる。これは関数の大きさや、二つの関数の間の距離を測る方法の一つである。f が積分可能ならば $|f|$ も積分可能であること、そして $\left|\int f\right| \le \int |f|$ が成り立つことを証明するのは、実解析（real analysis）の初期の標準的な演習問題である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、リーマン積分（Riemann integral）をこの両方を証明できるほど丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。