解答例

STEP I 2000、第 7 問

純粋数学 • 導関数の評価

> **STEP I 2000、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q7

鍵となる考え方

微分すると、条件 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ は「a は x のある関数以上である」という形になる。したがって、すべてはその関数の**最大値**にかかっている。この関数は x^2 だけに依存し、置換 $u = 1 + x^2$ を行うと $1/u$ の 2 次式になる。あとは平方完成（completing the square）によって最大値が得られ、それがどこでとられるかも正確にわかる。

解答

導関数

商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

であるから、

$$\mathrm{f}'(x) = a - g(x), \qquad \text{ただし} g(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

よって、すべての x に対して $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ となるのは、すべての x に対して $a \geq g(x)$ となるとき、かつそのときに限る。したがって g の最大値を求めればよい。

g の最大値

$u = 1 + x^2$ とおくと、$u \geq 1$ かつ $x^2 = u - 1$ である。このとき

$$g = \frac{(u-1)(u+2)}{u^2} = \frac{u^2 + u - 2}{u^2} = 1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}.$$

考えてみよう これを u ではなく $1/u$ を用いて表すのがよいのはなぜか。

$s = 1/u$ を用いると $g = 1 + s - 2s^2$ となり、これは単なる 2 次式である。2 次式の最大値は平方完成から得られ、微積分は必要ない：

$$1 + s - 2s^2 = \frac{9}{8} - 2\left(s - \frac{1}{4}\right)^2.$$

平方は決して負にならないので、すべての x に対して $g \leq \frac{9}{8}$ であり、等号は $s = \frac{1}{4}$、すなわち $u = 4$、$x = \pm\sqrt{3}$ のときに限り成り立つ。

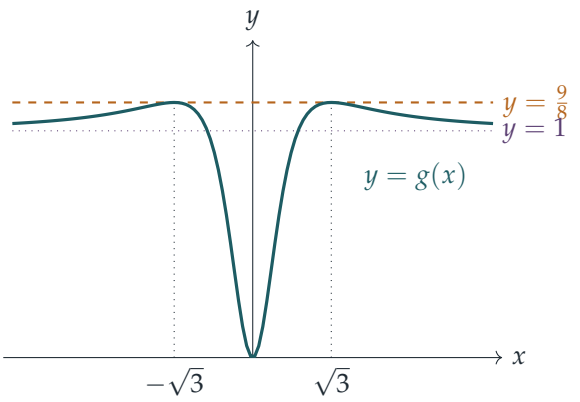
これを x を用いた式に戻すと（$s - \frac{1}{4} = \frac{3-x^2}{4(1+x^2)}$ を用いる）、導関数についてのすっきりした恒等式が得られる：

$$\mathrm{f}'(x) = \left(a - \frac{9}{8}\right) + \frac{(3-x^2)^2}{8(1+x^2)^2}.$$

結論

$a \geq \frac{9}{8}$ ならば、第 1 項の括弧は非負であり、第 2 項は平方を正の量で割ったものなので、これも非負である。したがって、求めるとおり、すべての x に対して $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ である。

定数 $\frac{9}{8}$ は最良でもある：$a < \frac{9}{8}$ ならば $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = a - \frac{9}{8} < 0$ となるからである。$a = \frac{9}{8}$ のとき、f' が 0 になるのは $x = \pm\sqrt{3}$ のみなので、f はやはり狭義単調増加であり、停留点である変曲点（stationary point of inflection）を 2 つもつ。



g のグラフは 0 から上昇し、極限値 1 を超えて、$x = \pm\sqrt{3}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ に達したのち、再び 1 に向かって下がっていく。導関数 $\mathrm{f}'(x)$ は、直線 $y = a$ がこの曲線よりどれだけ上にあるかを表す高さである。

検算

- $x = \sqrt{3}$ のとき：$g = \dfrac{3 \cdot 6}{4^2} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$。✓
- $x \to \infty$ のとき $g \to 1 < \frac{9}{8}$ である。これは理にかなっている。$\frac{x^3}{1+x^2}$ は x が大きいとき x のようにふるまうので、その傾きは 1 に近づくからである。
- 数値的に確かめると、$a = \frac{9}{8}$ のとき、$[-100, 100]$ 上の刻み幅 0.001 の格子点における $\mathrm{f}'(x)$ の最小値は約 2×10^{-10} である（実質的に 0 で、$x \approx \pm\sqrt{3}$ においてとる）。$a = 1.1$ のときは $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = -0.025 < 0$ となる。

よくある間違い

- g の無限遠での極限値 1 を最大値とみなしてしまう。曲線は極限値を超えるので、答えは 1 ではなく $\frac{9}{8}$ になる。
- g を直接微分して、計算の中で迷子になる。置換 $s = 1/(1+x^2)$ を使えば、1 行の平方完成で済む。

STEP のその先へ

ここでは「すべての x に対して」という主張が、**上限**（supremum）を求める問題に帰着された：至るところで $\mathrm{f}' \geq 0$ となるのは、$a \geq \sup g$ のとき、かつそのときに限る。g が無限遠で極限をもつにもかかわらず、有限の点で最大となるという事実は、極限が必ずしも上界にはならないことへのよい戒めである。解析学（analysis）では、導関数が非負の関数は増加関数であることを（平均値の定理（Mean Value Theorem）を用いて）証明する。だからこそ、この問題は本当は f が単調（monotonic）かどうかを問うものなのである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。