解答例

STEP I 2000、第 6 問

純粋数学 • 直線で囲まれた領域

> **STEP I 2000、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q6

鍵となる考え方

x と y の 2 次式が 2 つの 1 次因数に因数分解（factorise）できるとき、その式は 2 本の直線の組を表す。2 つの因数の積が正となるのは両因数が同符号のときちょうどであり、負となるのは異符号のときである。したがって各不等式は、交わる 2 直線にはさまれた、向かい合う一対の「くさび形」領域を選び出す。両方の領域を同じ座標軸上に描いてしまえば、共通の点を見つけるのは見るだけの問題である。

解答

1 つ目の因数分解と領域

右辺を展開すると

$$\begin{aligned}(x-y+2)(x+y-1) &= x^2+xy-x-xy-y^2+y+2x+2y-2\\ &= x^2-y^2+x+3y-2,\end{aligned}$$

となり、求める式が得られる。よって 1 つ目の不等式は、両辺から 2 を引くと

$$(x-y+2)(x+y-1) > 0.$$

となる。境界は 2 直線

$$L_1:\ y = x+2, \qquad L_2:\ y = 1-x,$$

からなる。これらの傾き（gradient）は 1 と -1 であり、$x+2 = 1-x$ となるところ、すなわち $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ で交わる。

積が正となるのは、両因数が同符号のときである。

- ともに正：$y < x+2$ かつ $y > 1-x$、すなわち L_1 の下側かつ L_2 の上側。これは交点の**右側**のくさび形である（たとえば $(5,0)$ を含む）。
- ともに負：$y > x+2$ かつ $y < 1-x$、すなわち L_1 の上側かつ L_2 の下側。これは交点の**左側**のくさび形である（$(-5,0)$ を含む）。

よって求める領域は、直線 $y = x+2$ と $y = 1-x$ にはさまれた左右の向かい合う一対のくさび形であり、直線そのものは含まない（直線上では積は 0 であり、> 0 ではない）。簡単な確認をしておく。原点では式の値は $-2 < 0$ であり、原点は下側のくさび形にあるので、正しく除外されている。

2 つ目の領域

> **考えてみよう** こちらも因数分解できるとなぜわかるのか。また、因数はどのような形になるはずか。

2 次の項 $x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y)$ から、次の形を試してみる。

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = (x+2y+a)(x-2y+b).$$

右辺を展開すると $x^2 - 4y^2 + (a+b)x + (2b-2a)y + ab$ となる。係数を比較すると $a+b = 3$ かつ $b-a = -1$ であるから $a = 2$、$b = 1$ であり、このとき定数項 $ab = 2$ も一致する。よって、2 つ目の不等式の両辺に 2 を加えると

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y < -2 \iff (x+2y+2)(x-2y+1) < 0.$$

となる。境界の直線は

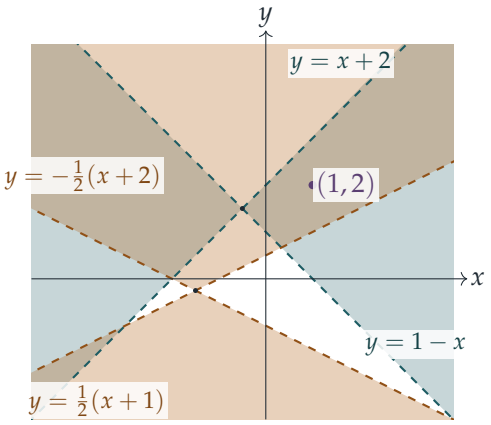
$$L_3 : y = -\tfrac{1}{2}(x+2), \qquad L_4 : y = \tfrac{1}{2}(x+1),$$

であり、傾きは $-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$、$-x-2 = x+1$ となるところ、すなわち $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ で交わる。

今度は両因数が**異符号**である必要がある。

- $x+2y+2 > 0$ かつ $x-2y+1 < 0$：$y > -\frac{1}{2}(x+2)$ かつ $y > \frac{1}{2}(x+1)$、すなわち両直線の上側。これは**上側**のくさび形である（$(0,5)$ を含む）。
- $x+2y+2 < 0$ かつ $x-2y+1 > 0$：両直線の下側。これは**下側**のくさび形である（$(0,-5)$ を含む）。

よって 2 つ目の領域は、直線 L_3 と L_4 にはさまれた上下の向かい合う一対のくさび形であり、やはり境界は含まない。



図では 1 つ目の領域を青緑色（左右のくさび形）、2 つ目の領域を琥珀色（上下のくさび形）で塗っており、色の濃く重なった部分が両方の不等式を満たす部分である。破線は含まない。

両方の領域に属する点

2 組のくさび形は確かに重なっている。右側の青緑色のくさび形は傾き ± 1 の 2 直線の間で右へ広がっており、一方、上側の琥珀色のくさび形は、傾き $\pm\frac{1}{2}$ のより緩やかな 2 直線の両方より上にあるすべての点を含む。$x > -\frac{1}{2}$ では、青緑色のくさび形の上の縁 $y = x + 2$ は直線 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ より速く増加するので、両者の間には余地がある。

たとえば $(x, y) = (1, 2)$ をとる。このとき

$$x^2 - y^2 + x + 3y = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 > 2$$

かつ

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = 1 - 16 + 3 - 4 = -16 < -2,$$

であるから、$(1, 2)$ は両方の不等式を満たす。(因数で確かめると、$(x - y + 2)(x + y - 1) = 1 \cdot 2 > 0$ かつ $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot (-2) < 0$ である。)

検算

- それぞれの因数分解は適当な点で確かめられる。$(3, 1)$ では $x^2 - y^2 + x + 3y - 2 = 12$、$(x - y + 2)(x + y - 1) = 4 \cdot 3 = 12$ であり、同じ点で $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = 14$、$(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot 2 = 14$ である。
- 各くさび形から 1 点ずつ試す。たとえば $(0, -5)$ では $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = -90 < -2$ となり、下側の琥珀色のくさび形が 2 つ目の領域に属することが確かめられる。

- $[-10, 10]^2$ 内の 200 000 個の乱数点で数値的に確認したところ、不等式と上のくさび形による記述との間に食い違いは見られなかった。

よくある間違い

- 違う組のくさび形を塗ってしまう。「上側」「下側」に頼るのではなく、必ず 1 点（原点がいちばん簡単である）で試すこと。
- 定数を移項するときに -2 や $+2$ を忘れる。1 つ目の不等式は $(x-y+2)(x+y-1) > 0$、2 つ目は $(x+2y+2)(x-2y+1) < 0$ である。
- 境界の直線を実線で描いてしまう。不等式は等号を含まない（strict）ので、直線は除外される。

STEP のその先へ

2 変数の 2 次式 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ は 2 次曲線（conic）を定める。それが 2 つの 1 次因数に因数分解できるとき、その 2 次曲線は**退化している**（degenerate）といい、2 直線の組となる。これが起こるのは、係数からつくられるある 3×3 行列式（determinant）が 0 になるときちょうどである。2 次形式（quadratic form）の符号の様子（ここでは $x^2 - y^2$ と $x^2 - 4y^2$ で、どちらも不定符号（indefinite））は、大学 1 年の線形代数で対称行列（symmetric matrix）とその固有値（eigenvalue）を通して学ぶ。これを知るには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。