解答例

STEP I 2000、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

> **STEP I 2000、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q5

鍵となる考え方

すべては傾いた平面（inclined plane）の中で起こるので、その平面内に互いに垂直な 2 つの単位ベクトル（unit vector）をとる。一方は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿ってまっすぐ上向きに、もう一方は水平にとる。すると Arthur と Bertha の位置はこれらの簡単な一次結合で表され、和積公式（sum-to-product formulae）を使えば差はすぐに整理できる。鉛直線とのなす角については、平面内の 2 つの方向それぞれが鉛直方向に対してどう位置しているかがわかればよく、そこで θ が入ってくる。

解答

設定

O を通る最も急な線に沿って上向きの単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とし、平面内で $\mathbf{e}$ に垂直で、2 人がいる側を向く単位ベクトルを $\mathbf{f}$ とする。$\mathbf{f}$ は最大傾斜線に垂直なので水平である。鉛直上向きの単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とする。このとき

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}=\sin\theta,\qquad \mathbf{f}\cdot\mathbf{k}=0,\qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=0.$$

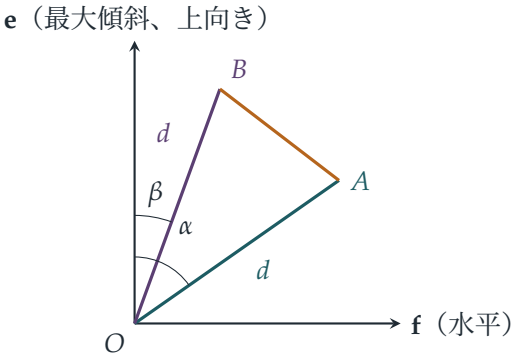
が成り立つ。（1 つ目は、$\mathbf{e}$ が水平面と角 θ をなし、したがって $\mathbf{k}$ と角 $\frac{\pi}{2}-\theta$ をなすことから従う。）

2 人は同じ速さで歩くので、Arthur が距離 d だけ歩いたとき、Bertha も距離 d だけ歩いている。O に対する 2 人の位置は

$$\mathbf{a}=d(\cos\alpha\,\mathbf{e}+\sin\alpha\,\mathbf{f}),\qquad \mathbf{b}=d(\cos\beta\,\mathbf{e}+\sin\beta\,\mathbf{f}).$$

である。最も急な線に対して同じ側を上り方向に歩くということは、$0\le\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$ を

意味する。



図は傾いた平面そのものを正面から見て描いたものである。

2人の間の距離

和積公式を用いると

$$\begin{aligned}\mathbf{a}-\mathbf{b} &= d[(\cos\alpha-\cos\beta)\,\mathbf{e}+(\sin\alpha-\sin\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= d[-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{e}+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= 2d\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,[-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}].\end{aligned}$$

となる。$s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ とおく。$\mathbf{e}$ と $\mathbf{f}$ は互いに垂直な単位ベクトルであり、$\sin^2 s+\cos^2 s=1$ であるから、ベクトル $\mathbf{u}=-\sin s\,\mathbf{e}+\cos s\,\mathbf{f}$ は単位ベクトルである。したがって

$$AB=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2d\,|\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)|,$$

となり、求める結果が得られた。（幾何的に見れば、OAB は等しい2辺が d、頂角が $|\alpha-\beta|$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であり、O から垂線を下ろしても同じ答えが得られる。）

鉛直線とのなす角

$\alpha\neq\beta$ のとき、$0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2}$ より $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\neq 0$ なので $A\neq B$ であり、直線 AB はきちんと定まる。上の計算から、この直線は単位ベクトル $\mathbf{u}$ に平行であり、同じことだが $\mathbf{v}=-\mathbf{u}=\sin s\,\mathbf{e}-\cos s\,\mathbf{f}$ に平行である。

考えてみよう 直線には2つの向きがある。鉛直線と比べるべきなのはどちらの向きだろうか？

直線と鉛直線のなす角は鋭角（acute angle）または直角であるから、直線に沿った向きのうち上向き、少なくとも下向きでないほうを用いる。ここで

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin s\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}) - \cos s\,(\mathbf{f}\cdot\mathbf{k}) = \sin\theta\sin s.$$

である。$0 \le s < \frac{\pi}{2}$ かつ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので、これは 0 以上であり、$\mathbf{v}$ が上向きの方向である。$\mathbf{v}$ と $\mathbf{k}$ はともに単位ベクトルなので、両者のなす角 ϕ は

$$\cos\phi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

を満たし、これが求める結果である。この値が d によらないことに注意しよう。2 人が歩くにつれて、直線 AB は自分自身に平行なまま移動するのである。

検算

- Arthur が水平に歩き（$\alpha = \frac{\pi}{2}$、境界の場合）、Bertha がまっすぐ上に歩く（$\beta = 0$）とすると、$AB = 2d\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,d$ となる。これは長さ d の互いに垂直な 2 つの道についてのピタゴラス（Pythagoras）の定理にほかならない。$\theta = 30°$、$d = 1$ として座標を使うと $A = (1,0,0)$、$B = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ となるので、B から A への鉛直方向の落差は距離 $\sqrt{2}$ に対して $\frac{1}{2}$ である。よって $\cos\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354$ となり、$\sin 30°\sin 45°$ と一致し、$\phi \approx 69.3°$ である。
- 平面が水平（$\theta = 0$）ならば $\cos\phi = 0$ となる。直線は水平であり、当然そうあるべきである。
- 本物の 3 次元座標で θ、α、β、d を 10^5 通りランダムに選んでコンピュータで確かめたところ、どちらの公式とも 10^{-12} 以内で一致した。

よくある間違い

- 空間における鉛直線とのなす角ではなく、平面内で AB と最も急な線とのなす角を測ってしまう。答えには θ が現れなければならない。
- 絶対値を忘れる。$\beta > \alpha$ のとき $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ は負になるが、距離は負にならない。
- AB に沿って下向きの方向をとり、$\cos\phi = -\sin\theta\sin s$ としてしまう。直線と鉛直線のなす角が鈍角になることはない。

STEP のその先へ

ここでの方法は、問題に適した正規直交基底（orthonormal basis）を選び（平面内の 2 つのベクトルをとり、それらを周囲の空間の鉛直方向と関係づける）、長さや角度を内

積（dot product）から読み取るというものである。大学 1 年の線形代数（linear algebra）の講義では、これは基底の変換（change of basis）と正射影（orthogonal projection）の考え方になる。$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$ は $\mathbf{v}$ の鉛直方向への正射影の長さである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、幾何をふんだんに使いながらこれらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。