解答例

STEP I 2000、第 4 問

純粋数学 ・ 積分の評価

STEP I 2000、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s1-q4

鍵となる考え方

$1/(x^2+1)^4$ を初等的な方法で積分（integration）するのは容易ではない。そこでこの問題では、被積分関数を二つの部分に分ける。一つは厳密な導関数（exact derivative）の形をしていてそのまま積分できる項、もう一つは小さな残りの項である。小問 (ii) でこの分割を作り、小問 (i) で残りの項の評価を与える。積分を評価する（bound）には、ふつう被積分関数を評価し、それに区間の長さを掛ける。

解答

小問 (i)

$f(x) = \dfrac{x^6}{(x^2+1)^4}$ とおく。f は x^2 のみに依存するので $t = x^2$ とおくと、x と同様に t も $[0,1]$ を動き、$f = g(t)$ となる。ここで

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t)^4}.$$

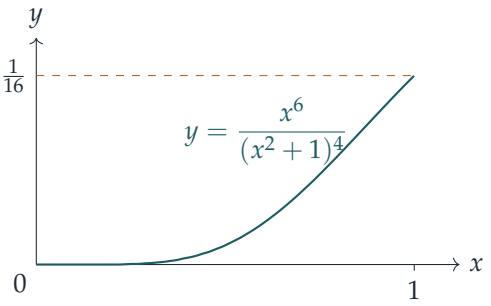
商の微分法（quotient rule）により、

$$g'(t) = \frac{3t^2(1+t)^4 - 4t^3(1+t)^3}{(1+t)^8} = \frac{t^2(3(1+t)-4t)}{(1+t)^5} = \frac{t^2(3-t)}{(1+t)^5}.$$

$0 < t \leq 1$ ではすべての因数が正である（特に $3-t \geq 2$）から $g'(t) > 0$ であり、g は $[0,1]$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）である。したがって最大値は $t = 1$、すなわち $x = 1$ でとり、

$$f(1) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$

となって、示すべき結果が得られる。また、全体で $f(x) \geq 0$ であり、最小値は $f(0) = 0$ である。



小問 (ii)

括弧内の式を商の微分法で微分する。$N = Ax^5 + Bx^3 + Cx$ とおき、分母 $(x^2+1)^3$ の導関数が $6x(x^2+1)^2$ であることに注意すると、因数 $(x^2+1)^2$ が一つ約分されて

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{N}{(x^2+1)^3}\right) = \frac{(5Ax^4+3Bx^2+C)(x^2+1) - 6x(Ax^5+Bx^3+Cx)}{(x^2+1)^4}.$$

分子を展開して x の累乗ごとにまとめると、

$$\begin{aligned} &5Ax^6 + 5Ax^4 + 3Bx^4 + 3Bx^2 + Cx^2 + C - 6Ax^6 - 6Bx^4 - 6Cx^2 \\ &\quad = -Ax^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C. \end{aligned}$$

これですべての項の分母が $(x^2+1)^4$ になったので、恒等式（identity）がすべての x について成り立つのは、分子が多項式として一致するとき、かつそのときに限る。

$$(D-A)x^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C = 1.$$

低次の項から係数を比較する（comparing coefficients）と、$C = 1$、次に $3B = 5C = 5$、次に $5A = 3B = 5$、さらに $D = A$ を得る。よって

$$A = 1, \qquad B = \tfrac{5}{3}, \qquad C = 1, \qquad D = 1.$$

小問 (iii)

小問 (ii) の恒等式を $[0,1]$ 上で積分する。右辺の第 1 項は厳密な導関数なので

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} &= \left[\frac{x^5 + \frac{5}{3}x^3 + x}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1+\frac{5}{3}+1}{8} - 0 + J = \frac{11}{24} + J, \end{aligned}$$

ここで $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$ である。

考えてみよう J を実際に計算せずに評価するにはどうすればよいか？

小問 (i) より、J の被積分関数は $0 \le f(x) \le \frac{1}{16}$ を $[0,1]$ 内のすべての x に対して満たす。この不等式を長さ 1 の区間で積分すると

$$0 \le J \le \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}.$$

各辺に $\frac{11}{24}$ を加えると

$$\frac{11}{24} \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \le \frac{11}{24} + \frac{1}{16},$$

となり、示すべき結果が得られる。(f は連続であり、区間全体でどちらの限界値にも等しくはならないので、実際には両方の不等式は狭義の不等号で成り立つが、問題が求めているのは $\le$ だけである。)

検算

- 小問 (ii) の恒等式に $x = 0$ を代入すると、導関数の項は $C = 1$ となり、D の項は消えるので $1 = 1$ を得る。$x = 1$ では導関数の分子が $-1+0+0+1 = 0$ となるので、恒等式は $\frac{1}{16} = \frac{D}{16}$ となり、$D = 1$ と整合する。
- 数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \approx 0.47460$ となり、$\frac{11}{24} \approx 0.45833$ と $\frac{11}{24} + \frac{1}{16} \approx 0.52083$ の間に余裕をもって収まる。残りの項 $J \approx 0.01627$ は $\frac{1}{16}$ よりずっと小さいが、これは f が $x = 1$ の近く以外ではごく小さいからである。

よくある間違い

- 商の微分法で共通因数 $(x^2+1)^2$ を約分し忘れること。そうすると分母が $(x^2+1)^6$ のまま残り、係数比較が煩雑になる。
- 小問 (i) で、$x = 1$ が停留点または端点であることだけを確かめること。端点での値が最大であると分かるには、f が増加関数であることを示す（あるいはすべての候補を比較する）必要がある。

STEP のその先へ

置換 $x = \tan\theta$ により、この積分は $\int_0^{\pi/4} \cos^6\theta \, \mathrm{d}\theta$ に変わり、これは漸化式（reduction formula）を用いて厳密に計算できる。その値は $\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}$ であり、先の数値的な見積もりと一致する。被積分関数を「厳密な導関数と小さな何か」に分けることは漸化式の背後にある考え方であり、被積分関数を評価することで積分を評価するのは実解析（real analysis）の基本的な評価である。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、こうした評価を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。