解答例

STEP I 2000、第 3 問

純粋数学 • 階段関数の積分

> **STEP I 2000、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q3

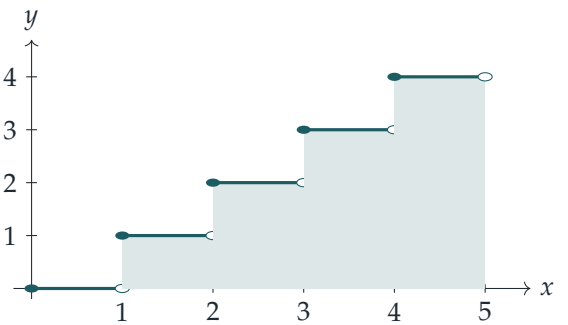
鍵となる考え方

どんな量であれ、その整数部分（integer part）をとったものは階段関数（step function）である。すなわち、区間上では一定の値をとり、そこで 1 だけ跳ね上がる。したがって積分は長方形の面積の和にすぎず、本当に必要な作業は各段がどこで始まりどこで終わるかを求めることだけである。$[e^x]$ の場合、跳びが起こるのは e^x が整数を通過するところ、すなわち $x = \ln k$ においてであり、こうして得られる対数の和はきれいに打ち消し合う（telescoping）。

解答

$y = [x]$ のグラフ

各区間 $k \le x < k+1$（k は整数）上では $[x] = k$ である。よってグラフは長さ 1 の水平な線分からなる階段であり、各線分の左端は黒丸（その値をとる）、右端は白丸（そこで関数が 1 だけ跳ね上がる）となる。



積分は網掛け部分の面積であり、これは幅 1、高さ $0,1,2,3,4$ の長方形からなる（$x=1,2,3,4$ という個々の点での値は面積に影響しない）。よって

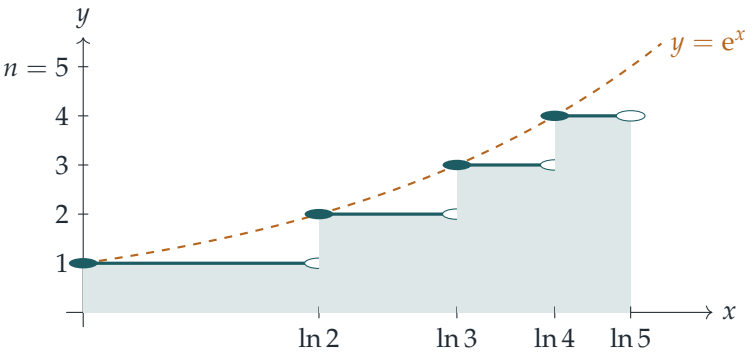
$$\int_0^5 [x]\,\mathrm{d}x = 0+1+2+3+4 = 10.$$

$y=[\mathrm{e}^x]$ のグラフ

$0 \le x < \ln n$ のとき $1 \le \mathrm{e}^x < n$ である。e^x は増加関数であるから、$k=1,2,\dots,n-1$ に対して

$$[\mathrm{e}^x]=k \iff k \le \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \le x < \ln(k+1),$$

が成り立つ。よってグラフはやはり高さ 1 ずつの段をもつ階段であるが、今度は x が増えるにつれて段が短くなっていく。高さ k の段の幅は $\ln(k+1)-\ln k = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ である。図は $n=5$ の場合であり、曲線 $y=\mathrm{e}^x$ を破線で示している。階段は各段の左端で曲線に接している。



積分

長方形の面積、すなわち高さ k と幅 $\ln(k+1)-\ln k$ の積を足し合わせると

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} k(\ln(k+1)-\ln k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k.$$

考えてみよう 二つの和を打ち消し合わせるにはどうすればよいか？

各 $\ln j$ は両方の和に、異なる係数で現れる。第 1 の和で $j=k+1$ と置き換えると、両

者の項がそろう。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k &= \sum_{j=2}^{n}(j-1)\ln j - \sum_{j=1}^{n-1} j\ln j \\ &= (n-1)\ln n + \sum_{j=2}^{n-1}((j-1)-j)\ln j - 1\cdot\ln 1 \\ &= (n-1)\ln n - \sum_{j=2}^{n-1}\ln j.\end{aligned}$$

ここでは第 1 の和から $j=n$ の項を、第 2 の和から $j=1$ の項を取り出した（後者は $\ln 1 = 0$ より 0 に等しい）。さて $\sum_{j=2}^{n-1}\ln j = \ln((n-1)!)$ であり、$(n-1)\ln n = n\ln n - \ln n$ であるから

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = n\ln n - (\ln n + \ln((n-1)!)) = n\ln n - \ln(n!),$$

となり、示すべき式が得られた。（$n=1$ のときは積分区間の長さが 0 であり、両辺とも 0 である。）

図による証明（発展）

幅 $\ln n$、高さ n の長方形の面積は $n\ln n$ である。そのうち階段の上側にある部分は、高さ 1 の水平な帯からなる。$m=1,\ldots,n$ に対して、高さ $m-1$ と m の間の帯は $x=0$ から $x=\ln m$ まで延びている。なぜなら $[\mathrm{e}^x] < m$ となるのはちょうど $x < \ln m$ のときだからである。この帯の面積は $\ln m$ であるから、段の上側の領域の面積は $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$ となる。これを $n\ln n$ から引けば、再び同じ結果が得られる。これは x ではなく y について積分することの離散版である。

検算

$n=2$ のとき、階段は高さ 1、幅 $\ln 2$ の長方形一つだけであり、公式は $2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$ を与える。$n=4$ のとき公式は $4\ln 4 - \ln 24 \approx 2.3671$ を与える。$\int_0^{\ln 4}[\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$ を中点則（midpoint rule）で数値計算すると小数第 5 位まで一致し、8 以下のすべての n についても同様である。また、段は曲線の下にあるから、答えは $\int_0^{\ln n}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = n-1$ より小さくなければならない。実際 $n=4$ のとき $2.37 < 3$ である。

よくある間違い

- 高さ k の段の幅を、$\ln(k+1)-\ln k$ ではなく（前半の設問をそのまま真似て）1 としてしまう。

- 階段を高さ 0 から始めてしまう。$0 \leq x < \ln n$ 上では $e^x \geq 1$ であるから、最も低い段の高さは 1 である。
- 添字のずらし方を誤って $(n-1)\ln n$ の項を落としてしまう、あるいはこの項を $\ln((n-1)!)$ とまとめて $\ln(n!)$ にしなければならないことに気づかない。

STEP のその先へ

段は $y = e^x$ の下にあるから、積分は $n-1$ より小さく、これを整理すると $\ln(n!) > n\ln n - n + 1$ となる。同様にして段を上から評価すると、スターリングの公式（Stirling's formula）$\ln(n!) \approx n\ln n - n$ へと至る。これは解析学（analysis）、確率論（probability）、組合せ論（combinatorics）における重要な評価である。また、長方形の和から帯の和への切り替えは「部分和分（summation by parts）」の一例であり、これは部分積分（integration by parts）の離散版にあたる。階段関数の積分を厳密な基礎の上に置くための次の一歩としては、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。