解答例

STEP I 2000、第 2 問

純粋数学 ・ 二項展開の係数

> **STEP I 2000、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q2

鍵となる考え方

分数の項を含む 2 つの二項式を展開してから、指数が一致する項を探すのは煩雑である。先に x の負の冪をくくり出し、各括弧を単一の x の冪（x^6 または x^2）についての多項式（polynomial）にしておくほうがはるかに見通しがよい。すると、因数分解（factorisation）$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$ のおかげで、2 つ目の積は 1 つ目の積が姿を変えたものにすぎないことがわかり、「これを用いて（hence）」の部分はほとんど手間がかからない。

解答

1 つ目の展開

各括弧から x の最も低い冪をくくり出すと、

$$\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right)^5 = \left(\frac{x^6 - 1}{x^2}\right)^5 = x^{-10}\,(x^6 - 1)^5,$$
$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)^6 = x^{-6}\,(x^2 - 1)^6.$$

よって式全体は $x^{-16}P(x)$ である。ただし

$$P(x) = (x^6 - 1)^5\,(x^2 - 1)^6.$$

したがって、もとの展開における x^n の係数（coefficient）は、多項式 $P(x)$ における x^{n+16} の係数に等しい。

二項定理（binomial theorem）により

$$(x^6-1)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(-1)^{5-j}x^{6j},\qquad (x^2-1)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}x^{2k},$$

であるから、$P(x)$ における x^m の係数は、$6j+2k=m$、$0\le j\le 5$、$0\le k\le 6$ を満たすすべての組についての

$$\binom{5}{j}(-1)^{5-j}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}$$

の和である。

x^{-12} の係数。 $m=-12+16=4$、すなわち $6j+2k=4$ となる組が必要である。$6j\le 4$ より $j=0$ に限られるので、組は $(j,k)=(0,2)$ のみであり、

$$\binom{5}{0}(-1)^5\cdot\binom{6}{2}(-1)^4=(-1)(15)=-15,$$

となって、示すべき値が得られる。

x^2 の係数。 今度は $m=2+16=18$ であるから $6j+2k=18$、すなわち $k\le 6$ のもとで $3j+k=9$ である。これより $j=1,2,3$ が許される。

(j,k)	$(x^6-1)^5$ から	$(x^2-1)^6$ から	積
$(3,0)$	$\binom{5}{3}(-1)^2=10$	$\binom{6}{0}(-1)^6=1$	10
$(2,3)$	$\binom{5}{2}(-1)^3=-10$	$\binom{6}{3}(-1)^3=-20$	200
$(1,6)$	$\binom{5}{1}(-1)^4=5$	$\binom{6}{6}(-1)^0=1$	5

よって x^2 の係数は $10+200+5=215$ である。

考えてみよう なぜ $j=0$ や $j=4$ は x^{18} に寄与しないのか？

$j=0$ なら $k=9$、$j=4$ なら $k=-3$ が必要になるが、どちらも $0\le k\le 6$ の範囲にない。ここでは組を見落としたり、存在しない組を加えたりしやすいので、可能性を系統的に書き出すとよい。

2つ目の展開

考えてみよう x^4+x^2+1 は前半とどう関係しているのか？

x^6-1 を x^2 についての立方の差（difference of cubes）とみたときの、もう一方の因数である。

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1).$$

$(x^2-1)^{11}$ を $(x^2-1)^5(x^2-1)^6$ と分けると、

$$(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5 = [(x^2-1)(x^4+x^2+1)]^5(x^2-1)^6 = (x^6-1)^5(x^2-1)^6 = P(x).$$

よって 2 つ目の展開はちょうど $P(x)$ であり、これは 1 つ目の展開の x^{16} 倍である。

x^4 の係数。 これは $P(x)$ における x^4 の係数であり、すでに上で求めている（1 つ目の展開における x^{-12} に対応していた）。その値は -15 である。

x^{38} の係数。 これは $6j+2k=38$、すなわち $j\le 5$、$k\le 6$ のもとで $3j+k=19$ に対応する。$k\le 6$ より $3j\ge 13$ が必要なので $j=5$、$k=4$ であり、

$$\binom{5}{5}(-1)^0\cdot\binom{6}{4}(-1)^2 = 15.$$

よって x^{38} の係数は 15 である。

数え上げをせずにこれを見るうまい方法がある。P の次数（degree）は $30+12=42$ であり、x を $1/x$ に置き換えると

$$x^{42}P(1/x) = (1-x^6)^5(1-x^2)^6 = (-1)^{11}P(x) = -P(x).$$

係数を比較すると、P における x^{42-m} の係数は x^m の係数の符号を反転したものである。$m=4$ とすれば、x^{38} の係数は $-(-15)=15$ となり、一致する。

検算

- $P(x)$ に $x=1$ を代入すると 0 になるので、P の係数をすべて足すと 0 になる。完全に展開した場合には、これが手早い確認になる。
- 2 つの積をいずれもコンピュータで（係数のリストとして）厳密に展開した。1 つ目では x^{-12} の係数が -15、x^2 の係数が 215、2 つ目では x^4 の係数が -15、x^{38} の係数が 15 となり、さらに 2 つ目の積の次数が 42 であって 1 つ目の x^{16} 倍に等しいことも確かめた。
- もとの式を x のランダムな有理数値で評価すると、計算した展開と厳密に一致する。

よくある間違い

- 符号の誤り：選んだ冪が x^{6j} と x^{2k} のとき、項の符号は $(-1)^{5-j}(-1)^{6-k} = -(-1)^{j+k}$ であって、$(-1)^{j+k}$ ではない。誤った方を使うと、すべての答えの符号が反転する。

- x^2 の係数で $(1,6)$ や $(3,0)$ の項を忘れ、200 や 205 としてしまう。
- 因数分解に気づかずに $(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5$ を直接展開する：不可能ではないが、長く、間違えやすい。

STEP のその先へ

和の積を 1 つの和として書き、x のある冪を取り出すという考え方は、**母関数**（generating functions）の背後にある発想である。積の係数は、各部分から合計をつくる方法の数を数えており、これはまさに上で組 (j,k) を数えたのと同じことである。対称性 $x^{42}P(1/x) = -P(x)$ は、P が（反）**回文的**（palindromic）な多項式であることを述べている。このような多項式は円分多項式（cyclotomic polynomials）や 1 の冪根（roots of unity）の研究に現れ、x^6-1 はその最初の例である。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* がよい次の一歩であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は多項式の因数分解をきちんと扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。