解答例

STEP I 2000、第 14 問

確率・統計 ・ 一様分布の積率

> **STEP I 2000、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q14

鍵となる考え方

ここで現れる量はすべて一様分布（uniform distribution）のモーメント（moment）であり、$[-1,1]$ 上の X のモーメントは簡単に求まる。奇数次のものは対称性により 0 となり、偶数次のものは $1/(k+1)$ である。$Z = Y - X$ については、Z の分布そのものはまったく必要ない。$(Y-X)^2$ と $(Y-X)^4$ を二項展開し、独立性（independence）を用いれば、すべての期待値はすでに知っているモーメントの積になる。

解答

X のモーメント

X は $[-1,1]$ 上で確率密度 $\frac{1}{2}$ をもつので、整数 k に対して

$$\mathrm{E}(X^k) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k \text{ が奇数（被積分関数が奇関数）}, \\ \dfrac{1}{k+1}, & k \text{ が偶数}. \end{cases}$$

特に $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X^3) = 0$、$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$、$\mathrm{E}(X^4) = \frac{1}{5}$ である。したがって

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X^2) = \mathrm{E}(X^4) - (\mathrm{E}(X^2))^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Y も同じ分布に従うので、同じモーメントをもつ。

Z^2 の平均

展開すると $Z^2 = Y^2 - 2XY + X^2$ である。X と Y は独立なので $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$ となり、

$$\mathrm{E}(Z^2) = \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Z^2 の分散

$\mathrm{E}(Z^4)$ が必要である。二項定理（binomial theorem）により

$$Z^4 = (Y - X)^4 = Y^4 - 4Y^3X + 6Y^2X^2 - 4YX^3 + X^4.$$

考えてみよう Y^3X の期待値を本当に $\mathrm{E}(Y^3)\,\mathrm{E}(X)$ としてよいのだろうか？

よい。X と Y が独立であれば、Y^3 と X のようにそれぞれの関数どうしも独立であり、独立な確率変数の積の期待値は期待値の積に等しいからである。中間にある二つの交差項はいずれも X または Y の奇数乗を含むので、その期待値は 0 である。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^4) &= \mathrm{E}(Y^4) + 6\,\mathrm{E}(Y^2)\,\mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(X^4)\\ &= \frac{1}{5} + 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{E}(Z^4) - (\mathrm{E}(Z^2))^2 = \frac{16}{15} - \frac{4}{9} = \frac{48-20}{45} = \frac{28}{45}.$$

$\frac{28}{45} = 7 \times \frac{4}{45}$ であるから $\mathrm{Var}(Z^2) = 7\,\mathrm{Var}(X^2)$ となり、示すべきことが得られた。

検算

- Z は $[-2,2]$ 上で三角形の確率密度 $f(z) = \frac{1}{4}(2 - |z|)$ をもつ。直接計算すると $\mathrm{E}(Z^4) = 2\int_0^2 \frac{1}{4}z^4(2-z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{16}{15}$ となり、展開による結果と一致する。
- $\mathrm{E}(Z) = 0$ であるから、$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y - X) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ である。
- (X, Y) の組を百万個生成したシミュレーションでは $\mathrm{Var}(X^2) \approx 0.0889$、$\mathrm{Var}(Z^2) \approx 0.623$ となり、理論値 $4/45 \approx 0.0889$、$28/45 \approx 0.622$ とよく合う。

よくある間違い

- $\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y^2) + \mathrm{Var}(X^2)$ と書いてしまうこと。これは Z^2 の中の項 $-2XY$ を無視している。この項は平均が 0 であるが、$4\,\mathrm{Var}(XY) = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ だけ寄与する。この間違いをすると $\frac{28}{45}$ ではなく $\frac{8}{45}$ が得られてしまう。

- Y^2X^2 の項の二項係数 6 を忘れること。
- $[-1,1]$ 上の確率密度を $\frac{1}{2}$ ではなく 1 としてしまうこと。こうするとすべてのモーメントが 2 倍になる。

STEP のその先へ

量 $\mathrm{E}(X^k)$ は X のモーメントであり、独立な確率変数の和を扱う巧みな方法がモーメント母関数（moment generating function）$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$ である。これについては $M_{Y-X}(t) = M_Y(t)M_X(-t)$ が成り立つ。この積を t のべき級数（power series）として展開すれば、Z のすべてのモーメントが一度に得られる。モーメント母関数と特性関数（characteristic function）は大学最初の確率論の講義で中心的な役割を果たし、中心極限定理（central limit theorem）の証明における主要な道具となる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらをわかりやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。