解答例

STEP I 2000、第 12 問

確率・統計 ・ 幾何分布

> **STEP I 2000、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q12

鍵となる考え方

どの場合も、**それまでの試行がすべて失敗したという条件のもとで、次の試行が成功する確率はいくらか**を考える。そして、最初の $n-1$ 回の失敗の確率と、第 n 回の成功の確率を掛け合わせる。3 つの規則からは、まったく異なる形の答えが得られる。条件付き確率（conditional probability）が増えていくもの、最初から一定であるもの、そして 1 回目の後に初めて一定になるものである。

以下では、必要な試行回数を N とし、$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して $\mathrm{P}(N = n)$ を求める。扉に合う鍵を**正しい鍵**とよぶ。

解答

小問 (i)

この場合は同じ鍵を二度と使わないので、一様（uniformly）にランダムな順序で鍵を試していることになる。対称性（symmetry）により、正しい鍵はその順序の k 個の位置のどれにも等しい確率で現れる。したがって

$$\mathrm{P}(N = n) = \frac{1}{k} \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots, k, \qquad \mathrm{P}(N = n) = 0 \text{ for } n > k.$$

対称性による議論があまりに鮮やかすぎて納得しにくいなら、代わりに条件付き確率を掛け合わせればよい。j 回失敗した後には、まだ試していない鍵が $k - j$ 本残っていて、そのうち 1 本が正しい鍵である。よって $1 \le n \le k$ に対して

$$\mathrm{P}(N = n) = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} \cdots \frac{k-n+1}{k-n+2} \cdot \frac{1}{k-n+1} = \frac{1}{k},$$

となる。積の因子が次々に打ち消し合う（telescoping）からである。

小問 (ii)

今度は各試行が k 本すべての鍵からの新たな独立（independent）な選択なので、それまでに何が起きたかにかかわらず、各試行は確率 $\frac{1}{k}$ で成功する。ちょうど n 回の試行が必要になるには、最初の $n-1$ 回が失敗し、第 n 回が成功しなければならない：

$$\mathrm{P}(N=n)=\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}\frac{1}{k},\qquad n=1,2,3,\ldots$$

これはパラメータ $\frac{1}{k}$ の幾何分布（geometric distribution）であり、n に上限はない。

小問 (iii)

1 回目の試行は確率 $\frac{1}{k}$ で成功するので、$\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$ である。

次に、第 m 回の試行（ある $m\geq 1$ について）が失敗したとする。このとき、第 m 回に試した鍵は誤った鍵である。第 $m+1$ 回では、残りの $k-1$ 本から一様に選ぶ。

> **考えてみよう** 第 m 回より前の経緯は、第 $m+1$ 回で成功する確率に影響するだろうか。

影響しない。重要なのはどの鍵が除外されたかだけであり、それは常に**誤った**鍵である。したがって、選択肢となる $k-1$ 本の鍵には常に正しい鍵が含まれ、それまでに何が起きたかにかかわらず、第 $m+1$ 回の試行は確率 $\frac{1}{k-1}$ で成功し、確率 $\frac{k-2}{k-1}$ で失敗する。

よって $n\geq 2$ のとき、1 回目の試行が失敗し（確率 $\frac{k-1}{k}$）、第 $2,\ldots,n-1$ 回の試行が失敗し（それぞれ確率 $\frac{k-2}{k-1}$）、第 n 回の試行が成功する（確率 $\frac{1}{k-1}$）。したがって

$$\mathrm{P}(N=n)=\frac{k-1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2}\frac{1}{k-1}=\frac{1}{k}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{n-2},\qquad n\geq 2,$$

であり、これに $\mathrm{P}(N=1)=\frac{1}{k}$ が加わる。

興味深いことに、$\mathrm{P}(N=2)=\frac{1}{k}$ でもあり、小問 (i) と同じである。（$k=2$ のときは、規則により鍵を交互に使うことになるので、N は 1 または 2 で、それぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。0^0 を 1 と解釈すれば、公式もこの結果を与える。）

検算

- どの分布も総和が 1 になる。(iii) では $\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{j\geq 0}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^j=\frac{1}{k}+\frac{1}{k}(k-1)=1$。
- 平均（mean）も妥当な値になる：(i) では $\frac{k+1}{2}$、(ii) では k、(iii) では $1+\frac{(k-1)^2}{k}$ である。直前の鍵を繰り返さないことは (ii) に比べて少しは役に立つが、どの鍵も繰り返さない場合に比べるとその効果はずっと小さい。

- $k = 2, \ldots, 5$ および $n \leq 7$ について、選択のあらゆる列を分数で数え上げることにより、3 つの公式すべてを厳密に確かめた。また、$k = 5$ として (iii) を 2×10^5 回試行するシミュレーションを行ったところ、$\mathrm{P}(N = 3) \approx 0.1496$ となり、厳密な値 $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0.15$ とよく一致した。

よくある間違い

- (iii) で、1 回目の試行にも $\frac{k-2}{k-1}$ を使ってしまう。1 回目の選択は k 本すべての鍵から行うので、最初の因子は $\frac{k-1}{k}$ である。
- (i) で、$n > k$ のとき $\mathrm{P}(N = n) = 0$ であることを書き忘れる。
- (iii) で、除外される鍵が正しい鍵である可能性があると考えてしまう。除外されるのは、常に直前に失敗した鍵だけである。

STEP のその先へ

小問 (iii) は小さな**マルコフ連鎖**（Markov chain）である。次に何が起こるかは、これまでの経緯全体ではなく、現在の状態（state）（ここでは最後にどの鍵を試したか）だけで決まる。過去を無関係にしてくれる状態を見抜くことは、マルコフ連鎖の理論における中心的な技法であり、これによって煩雑な条件付き確率が単純な積に変わる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにこの水準でマルコフ連鎖を導入している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。