解答例

STEP I 2000、第 11 問

力学 ・ 梯子の摩擦とつり合い

> **STEP I 2000、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q11

鍵となる考え方

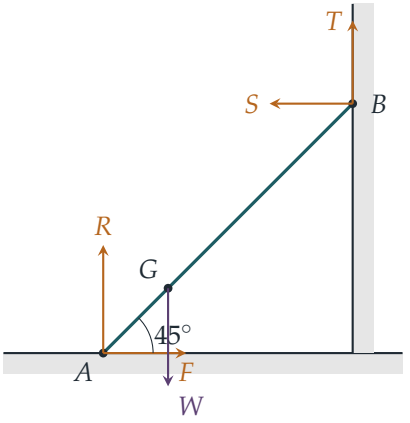
これは両端に摩擦（friction）がはたらくはしごの問題である。「A と B の両方で限界（limiting）」という条件により、各摩擦力はすべて垂直抗力（normal reaction）で表されるので、2 つの力の分解（resolving）の式から 4 つの接触力がすべて決まる。すると力のモーメント（moment）の式は条件として 1 つ余分になる。たまたま成り立つか、成り立たないかのどちらかである。前半では、それが成り立たないことを示す。後半では、追加した質量の位置を、それを成り立たせるための未知数として用いる。

解答

モデルと方程式

棒を剛体（rigid body）の棒とみなし、その重さ $W = 5g\,\mathrm{N}$ が G にはたらくとする。A（床）と B（壁）での接触はどちらも粗い。はたらく力は次のとおりである。

- A において：上向きの垂直抗力 R と水平方向の摩擦力 F。
- B において：壁から離れる向きの水平な垂直抗力 S と鉛直方向の摩擦力 T（上向きを正とするので、$T < 0$ なら下向きを意味する）。
- G において下向きにはたらく重さ W。



水平方向の力は F と S だけであり、$S \geq 0$ は棒を壁から押し離す向きにはたらく。したがって F は壁に向かう向きにはたらかなければならず、

$$F = S. \tag{1}$$

鉛直方向に分解すると、

$$R + T = W. \tag{2}$$

A のまわりのモーメントを考えるために、$AB = 0.81$、$c = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ とおく。このとき B は A から水平距離 $0.81c$、高さ $0.81c$ の位置にあり、G は A から水平距離 $0.21c$ の位置にある。時計回りと反時計回りのモーメントをとると、

$$S\,(0.81c) + T\,(0.81c) = W\,(0.21c),$$

となり、c を約すと

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W. \tag{3}$$

ここで 45° が役に立っている。因数 c がすべての項から約されるのである。

両端で同時に限界摩擦にはなりえない

両端で摩擦が限界（限界摩擦（limiting friction））であると仮定する。すると $F = 0.2R$ かつ $|T| = 1.0\,S = S$ である。

> **考えてみよう** B での摩擦が限界のとき、その摩擦はどちら向きにはたらくか。

自然に考えられるのは、A が壁から離れる向きに動き、B が下にすべり落ちようとしている場合であり、このとき $T = +S$ となる。念のため両方の符号を確かめる。

$T = S$ の場合。 (1) より $S = F = 0.2R$ であり、(2) から $R + 0.2R = W$ を得る。よって $R = \frac{5}{6}W$、$S = T = \frac{1}{6}W$ である。このとき (3) の左辺は

$$0.81\left(\tfrac{1}{6}W + \tfrac{1}{6}W\right) = 0.27\,W \neq 0.21\,W.$$

となる。よってモーメントの式は成り立たない。

$T = -S$ の場合。 (3) の左辺は 0 となるが、右辺は $0.21W > 0$ であり、これはありえない。

いずれの場合も棒は釣り合い（equilibrium）の状態にありえない。したがって、A と B の両方で摩擦が限界になることはない。これで示された。

（限界でない場合には釣り合いは確かに可能である。たとえば $T = S = \frac{7}{54}W$ は (3) を満たし、$R = \frac{47}{54}W$ を与え、$F = S \leq 0.2R$ となる。）

P に質量を加える

$AP = x\,\mathrm{m}$ とする。追加の重さも $W = 5g\,\mathrm{N}$ であり、P にはたらくので、重さの合計は $2W$ となる。式 (1) と (2) は

$$F = S, \qquad R + T = 2W,$$

となり、A のまわりのモーメントの式には項 $W\,(xc)$ が加わる。c を約すと

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W + x\,W. \tag{4}$$

となる。今度は両端で摩擦が限界である。$T = -S$ の場合はやはりありえない。そのとき (4) の左辺は 0 だが右辺は正だからである。よって $T = S$ かつ $F = 0.2R$ であり、したがって

$$S = 0.2R, \qquad R + 0.2R = 2W \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{5}{3}W, \quad S = T = \tfrac{1}{3}W.$$

これを (4) に代入すると

$$0.81 \times \tfrac{2}{3}\,W = 0.54\,W = 0.21\,W + x\,W,$$

となるので、$x = 0.33$ である。よって

$$AP = 0.33\,\mathrm{m}.$$

これは 0 と 0.81 の間にあるので、P は棒の上にある。P は G より先（さらに中点より先）にあるので、追加の質量によって全体の重心（centre of gravity）は棒の上の方へ移る。これは、はしごをすべりやすくする方向にはたらく。

検算

- P に質量がある場合、W を単位とした力は $R = \frac{5}{3}$、$F = S = T = \frac{1}{3}$ である。このとき $F/R = 0.2$、$T/S = 1$ なので、どちらも限界である。鉛直方向では $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$ であり、モーメントからは $0.81 \times \frac{2}{3} = 0.54 = 0.21 + 0.33$ を得る。
- 全体の重心は A から $\frac{1}{2}(0.21 + 0.33) = 0.27\,\mathrm{m}$ の位置にある。これは前半で両端が限界摩擦となるために必要だった位置（$0.21W$ に対する $0.27W$）にちょうど一致する。摩擦係数（coefficient of friction）が同じで、重さの合計が 2 倍になっただけなので、これは理にかなっている。
- 質量と g は全体を通して約されるので、答えはそれらによらない。$g = 9.8$ と実際の 45° のモーメントを用いて数値を代入すると、残差は 10^{-15} 程度になる。

よくある間違い

- A での摩擦の向きを逆にとってしまう。水平方向の力は他に S しかないので、F は壁に向かう向きでなければならない。
- B での摩擦が鉛直方向であることを忘れてしまう。この摩擦は鉛直方向の分解に現れ、R を重さの合計より小さくする。
- G の代わりに棒の中点を用いてしまう。この棒は一様ではない。

STEP のその先へ

平面内の剛体からは 3 つの釣り合いの式が得られるので、未知の接触力が 4 つある問題は**不静定**（statically indeterminate）である。剛体の静力学だけでは、摩擦が両端にどのように分担されるかはわからない。「両端で限界」という条件を課すと式が 2 つ加わり、系は過剰決定となる。前半に解が存在しないのは、まさにこのためである。工学では、接触部の弾性をモデル化することによって不静定性を解消する。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦を大学 1 年生の水準で丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。