解答例

STEP I 2000、第 10 問

力学 ・ 衝突と反発係数

STEP I 2000、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/00-s1-q10

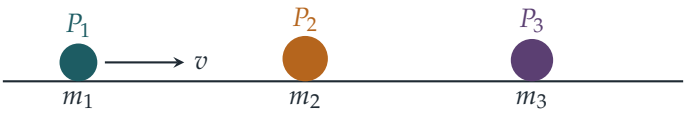
鍵となる考え方

各衝突からは二つの方程式が得られる。運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）である。本問では結果の一部がすでにわかっている（P_1 は静止し、P_3 は速さ v で動き出す）ので、速度について解くのではなく、未知の係数について解く。衝突が可能であるための条件は、反発係数（coefficient of restitution）に対する唯一の物理的制約 $0 \leq e \leq 1$ から得られる。そして最終的なエネルギーはただ一つの自由な質量 m_2 の関数となるので、これらの条件が許す区間でそれを最適化すればよい。

解答

モデル

三つの物体を、なめらかな台の上を一直線上に運動する質点として扱う。すると水平方向の外力ははたらかないので、各衝突において運動量は保存される。P_1 のはじめの運動の向きを正の向きとする。



一回目の衝突

P_2 が速度 u で動き出すとする。P_1 は静止するので、

$$\text{運動量：}\quad m_1 v = m_2 u \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{m_1 v}{m_2},$$

$$\text{反発：}\quad u - 0 = e(v - 0) \quad\Longrightarrow\quad e = \frac{u}{v} = \frac{m_1}{m_2}.$$

二回目の衝突

次に P_2 が速さ u で静止している P_3 に衝突する。衝突後の P_2 の速度を w とする。P_3 の速度は v と与えられている。運動量保存より

$$m_2 u = m_2 w + m_3 v \quad\Longrightarrow\quad m_1 v = m_2 w + m_3 v \quad\Longrightarrow\quad w = \frac{(m_1 - m_3)v}{m_2},$$

となる。ここで一回目の衝突から得た $m_2 u = m_1 v$ を用いた。反発の法則（遠ざかる速さ $= e' \times$ 近づく速さ）より

$$v - w = e' u.$$

w と u を代入し、両辺に m_2/v（これは 0 でない）を掛けると

$$m_2 - (m_1 - m_3) = e' m_1 \quad\Longrightarrow\quad e' = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1},$$

となり、求める結果が得られる。

このような衝突はいつ可能か

反発係数はつねに 0 以上 1 以下である。$0 \le e' \le 1$ を用い、$m_1 > 0$ を掛けると

$$0 \le m_2 + m_3 - m_1 \le m_1 \quad\Longleftrightarrow\quad m_1 \le m_2 + m_3 \le 2m_1,$$

となり、これが問われている不等式である。したがって、これは衝突が可能であるための必要条件である。

考えてみよう すべての制約を使っただろうか。e についてはどうか。

$0 \le e \le 1$ も必要である。$e = m_1/m_2$ なので、これは $m_2 \ge m_1$ のときに限り成り立つ。この条件は示すよう求められた結果には含まれていない（実際、この条件があれば左側の不等式 $m_2 + m_3 \ge m_1$ は自動的に成り立つ）が、最後の小問では重要になる。以上をまとめると、衝突が可能であるのは

$$m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3.$$

のときに限る。この区間が空でないためには $m_3 \le m_1$ が必要である。このとき $w = (m_1 - m_3)v/m_2 \ge 0$ なので、二回目の衝突の後 P_2 は前向きに動き続ける（ま

たは静止する）ので、静止している P_1 に戻ってきて衝突することはない。また $v - w = e'u \geq 0$ なので、P_2 が P_3 に再び追いつくこともない。したがって衝突はこの二回だけである。

最終的なエネルギー

最終的に P_1 は静止し、P_2 の速度は w、P_3 の速度は v であるから、最終的な運動エネルギー（kinetic energy）は

$$E = \tfrac{1}{2}m_2w^2 + \tfrac{1}{2}m_3v^2 = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2m_2} + \tfrac{1}{2}m_3v^2.$$

である。m_1、m_3、v を固定すると、変化できるのは m_2 だけであり、その範囲は $m_1 \leq m_2 \leq 2m_1 - m_3$ である。第一項は 0 以上の定数を m_2 で割ったものなので、E は m_2 の減少関数である（$m_1 = m_3$ のときは定数となるが、そのとき区間はそもそも一点 $m_2 = m_1$ のみである）。

エネルギーが最大となるのは $m_2 = m_1$ のとき（一回目の衝突が完全弾性衝突（perfectly elastic）、すなわち $e = 1$）であり、

$$E_{\max} = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2m_1} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2)\,v^2}{2m_1}.$$

エネルギーが最小となるのは $m_2 = 2m_1 - m_3$ のとき（二回目の衝突が完全弾性衝突、すなわち $e' = 1$）であり、

$$E_{\min} = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2(2m_1 - m_3)} + \frac{m_3v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - 2m_1m_3 + m_3^2 + 2m_1m_3 - m_3^2)v^2}{2(2m_1 - m_3)} = \frac{m_1^2v^2}{2(2m_1 - m_3)}.$$

検算

- 衝突によってエネルギーが増えることはないので、$E_{\max} \leq \frac{1}{2}m_1v^2$ でなければならない。これは $m_1^2 - m_1m_3 + m_3^2 \leq m_1^2$、すなわち $m_3(m_3 - m_1) \leq 0$ であり、$m_3 \leq m_1$ より成り立つ。
- $E_{\max} - E_{\min} = \dfrac{(m_1 - m_3)^3v^2}{2m_1(2m_1 - m_3)} \geq 0$ であることが確かめられる。また $m_1 = m_3$ のときは二つの答えはともに $\frac{1}{2}m_1v^2$ に等しい（このとき $m_2 = m_1$ であり、両方の衝突が弾性衝突でエネルギーは失われない）。
- 数値例として $m_1 = 2$、$m_3 = 1$、$v = 1$ とすると、はじめのエネルギーは 1、$E_{\max} = \frac{3}{4}$、$E_{\min} = \frac{2}{3}$ である。m_2 を $[2,3]$ の範囲で動かして厳密な計算を行うと、これらの最大値・最小値が再現され、さらにその範囲全体で $e, e' \in [0,1]$ が成り立ち、範囲外では成り立たないことが確認できる。

よくある間違い

- （e' だけから得た）$m_1 - m_3 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$ の範囲で最適化してしまう。こうすると、はじめのエネルギーすべてである $\frac{1}{2}m_1v^2$ が「最大値」として得られるが、それを与える m_2 の値では $e = m_1/m_2 > 1$ となり、ありえない。
- 反発の法則を逆にしてしまう。e 倍の**近づく**速さに等しいのは、**遠ざかる**速さである。

STEP のその先へ

本問の型、すなわち各制約がパラメータの許される区間を切り出し、その区間で単調（monotonic）な関数を最適化するという型は、制約付き最適化（constrained optimisation）の最も簡単な場合であり、これは線形計画法（linear programming）やラグランジュの未定乗数法（Lagrange multipliers）へと発展していく。物理の側面では、衝突は重心系（centre-of-mass frame）で考えるとはるかに見通しがよくなる。重心系では反発係数はすべての速度を単に $-e$ 倍するだけであり、失われるエネルギーは μ を換算質量（reduced mass）として $\frac{1}{2}\mu(1-e^2) \times (\text{相対速度})^2$ となる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突についてこの見方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。