解答例

STEP I 2000、第 1 問

純粋数学 ・ 対数と最高位の数字

> **STEP I 2000、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q1

鍵となる考え方

大きな数 N の最上位の数字（leading digit）は、$\log_{10} N$ の**小数部分**（fractional part）だけで完全に決まる。k を整数、$0 \le f < 1$ として $\log_{10} N = k + f$ と書けば $N = 10^f \times 10^k$ であり、N の最初の数字が d となるのはちょうど $\log_{10} d \le f < \log_{10}(d+1)$ のときである。したがって必要なのは数字 1 から 9 の対数だけであり、それらは $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ から得られる。あとは、丸め誤差（rounding error）をどこまで許容できるかに注意深く目を配ればよい。

解答

以下、log は $\log_{10}$ を表す。区間 $[0,1)$ は、ありうる最上位の数字ごとに一つずつ、九つの部分に分かれる：



小数部分 f が d と書かれた部分に入れば、最上位の数字は d である。

小問 (i)

$5 = 10/2$ かつ $6 = 2 \times 3$ であるから、

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.301029996 = 0.698970004 \approx 0.699,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.301029996 + 0.477121255 = 0.778151251 \approx 0.778,$$

である（いずれも小数第三位まで）。

次に

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 47.7121255.$$

与えられた $\log 3$ の値の誤差は 5×10^{-10} 以内であるから、この値の誤差は 5×10^{-8} 以内である。したがって確かに $47.712 < \log 3^{100} < 47.713$ である。これを

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 5 \approx 47.699 \quad \text{および} \quad \log\left(6 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 6 \approx 47.778$$

と比較すると、

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) < \log 3^{100} < \log\left(6 \times 10^{47}\right)$$

を得る。余裕（約 0.013 と 0.066）はどんな丸め誤差よりもはるかに大きく、また log は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、

$$5 \times 10^{47} < 3^{100} < 6 \times 10^{47}$$

が示された。よって 3^{100} は $5.\ldots \times 10^{47}$ の形であり、最初の数字は $\boxed{5}$ である（また 48 桁である）。

小問 (ii)

$\log 2 = 0.301029996$ を用いて同じ考え方を使う。この値の誤差は高々 5×10^{-10} である。10^n 倍するとその誤差も 10^n 倍になるので、小数部分が数直線の一つの部分の内側に余裕をもって収まっていることを確かめなければならない。

2^{1000}. $\log 2^{1000} = 301.029996$ であり、誤差は高々 5×10^{-7} である。小数部分は約 0.030 で、$\log 1 = 0$ と $\log 2 \approx 0.301$ の間にあるから、$2^{1000} = 1.\ldots \times 10^{301}$ であり、最初の数字は $\boxed{1}$ である。

$2^{10\,000}$. $\log 2^{10\,000} = 3010.29996$ であり、誤差は高々 5×10^{-6} である。小数部分は 0.299955 と 0.299965 の間にある。

考えてみよう 小数部分 0.29996 は $\log 2 = 0.30103$ に非常に近い。最初の数字が 2 でないと言い切れるだろうか？

言い切れる。差は $0.30103 - 0.29996 \approx 0.0011$ であり、これは起こりうる最大の誤差 5×10^{-6} の二百倍以上である。したがって小数部分は確かに $\log 2$ より小さく、$10^{3010} < 2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$ である。（同じことだが、$2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$ は $2^{9999} < 10^{3010}$、すなわち $\log 2 < 3010/9999 = 0.3010301\ldots$ を意味し、これは正しい。）最初の数字は $\boxed{1}$ である。

$2^{100\,000}$. $\log 2^{100\,000} = 30102.9996$ であり、誤差は高々 5×10^{-5} であるから、小数部分は 0.99955 と 0.99965 の間にある。これが数直線のどの部分に入るかを知る必要があるが、一番上の部分は

$$\log 9 = 2\log 3 = 0.954242510.$$

から始まる。$0.954 < 0.99955$ かつ $0.99965 < 1$ であるから、$9 \times 10^{30102} < 2^{100\,000} < 10^{30103}$ を得て、最初の数字は $\boxed{9}$ である。

> **考えてみよう** 誤差によって小数部分が 1 を超え、この数が $1.\ldots \times 10^{30103}$ になってしまうことはないのだろうか？

そうなるのは $100\,000 \log 2$ の真の値が 30103 以上である場合に限られるが、それにはこの値に 0.0004 の誤差が必要であり、これは最大誤差 5×10^{-5} の八倍にあたる。したがって最初の数字は 9 であり、$2^{100\,000}$ は 30 103 桁である。

検算

コンピュータによる厳密な整数演算で、すべてが確認できる：3^{100} は 48 桁で 515... から始まり、2^{1000} は 107... から始まり（302 桁）、$2^{10\,000}$ は 199... から始まり（3011 桁）、$2^{100\,000}$ は 999... から始まる（30 103 桁）。手法の簡単な妥当性確認として、$\log 2^{10} = 3.0103$ の小数部分は $0.0103 < \log 2$ であり、$2^{10} = 1024$ と合致する。

よくある間違い

- 最初の数字を対数の整数部分から読み取ってしまう。整数部分からわかるのは桁数（整数部分より一つ多い）だけであり、最上位の数字は小数部分に宿っている。
- 100 000 倍すると $\log 2$ の丸め誤差も同じだけ倍になることを忘れる。ここでは小数第九位まででちょうど足りるのであり、その理由を述べておく価値がある。
- $f = 0.9996 \approx 1$ を見て、数字は 1 だと結論してしまう。小数部分が 1 のすぐ下にあるということは、その数が十の累乗のすぐ下にあるということであり、したがって 9 から始まる。

STEP のその先へ

2^n の最上位の数字は $n \log 2$ の小数部分によって支配される。$\log 2$ は無理数（irrational）であるから、これらの小数部分は $[0, 1)$ において**一様分布**（equidistributed）する（ワイル（Weyl）の一様分布定理）。したがって、2 の累乗のうち数字 d で始まるものの

割合は $\log(1+1/d)$ に収束（converge）する。これがベンフォードの法則（Benford's law）であり、2 の累乗の約 30% は 1 で始まる。無理性と近似という側面については、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）がすばらしい読み物である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。