9.8 誰も自分のシャツを受け取らない

ワークシート

問題

STEP II 2016、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s2-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **手を止めて、やってみよう**　$n = 3$ の場合を試してみよ。カード $1, 2, 3$ の並べ方 6 通りをすべて書き出し、どのカードも自分の位置にないものがいくつあるか数えよ。根気があれば、$n = 4$ の場合も試してみよ（並べ方は 24 通りある）。

段階 1　三つの事象に対する包除原理（inclusion–exclusion）

扱う内容：三つの事象、そして四つの事象

> **考えてみよう**　$A \cup B$ を一つの事象（event）とみなし、C とあわせて二つの事象に対する公式を用いよ。$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ が必要になる。

段階 2 確率

扱う内容：小問 (i)〜(iii)

考えてみよう カード i が位置 i にあるとき、残りのカードの並べ方は何通りあるか。また、カード i とカード j がともに自分の位置にあるときはどうか。

段階 3 足し合わせる

扱う内容：少なくとも 1 枚のカードが自分の位置にある

手を止めて、やってみよう $\mathrm{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$ の公式において、k 個の事象の共通部分（intersection）を含む項はいくつあるか。それぞれの確率を掛けて整理せよ。ほとんどすべてが打ち消し合う。

段階 4　ちょうど 1 枚

扱う内容：ちょうど 1 枚のカードが自分の位置にある

> **考えてみよう**　どのカードが自分の位置にあるかを選べ。そのとき、残りの $n-1$ 枚のカードはどうなっていなければならないか。カードが $n-1$ 枚の場合について、前の答えを用いよ。

背後にある数学

e はどこから来るのか

級数 $\sum (-1)^k/k!$ は、指数級数（exponential series）$e^x = \sum x^k/k!$ に $x = -1$ を代入したものである。したがって $n \to \infty$ のとき

$$d_n \to e^{-1} \approx 0.3679,$$

となり、ちょうど 1 枚が一致する確率も同じ極限に近づく。この収束は驚くほど速い（図 9.8.1）。$1/n!$ の項で打ち切ったときの誤差は $1/(n+1)!$ より小さいので、$n = 7$ の時点ですでに答えは小数第 4 位まで $1/e$ と一致する。実際、n 個の対象の完全順列の個数 $n!\,d_n$ は、$n!/e$ に最も近い整数にちょうど等しい。

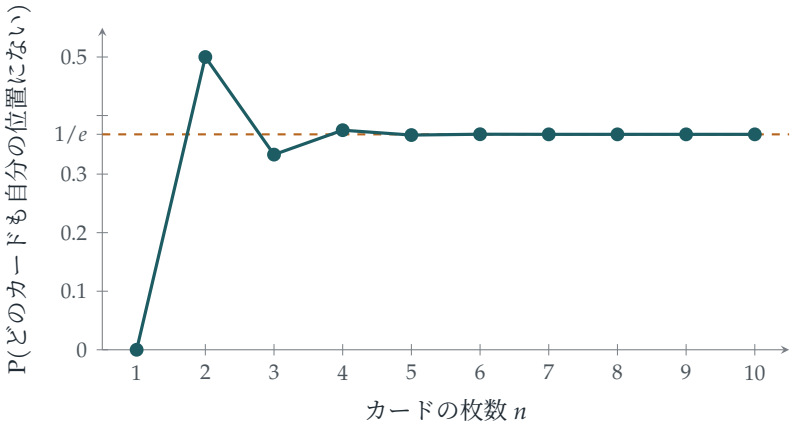

図 9.8.1　n 枚のカードを無作為に並べ替えたとき、どのカードも自分の位置にない確率。値は $1/e$ の上下を交互に行き来し、$n = 6$ 以降はこの縮尺では $1/e$ と区別がつかない。

一致の個数はポアソン分布に従う

さらに多くのことが成り立つ。自分の位置にあるカードの枚数を N とする。このとき各 k について $\mathrm{P}(N = k) \to \frac{e^{-1}}{k!}$ となる。すなわち、一致の個数は極限において平均 1 の**ポアソン分布**（Poisson distribution）に従う。平均が 1 である理由は計算なしでもわかる。N は $E_1, \ldots, E_n$ の指示変数（indicator variable）の和であり、それぞれの期待値（expectation）は $\frac{1}{n}$ である。そして事象が独立（independent）でなくても期待値は加法的である。STEP III 2004 Q12（演習問題を参照）では、分散（variance）も 1 であることを示す。ポアソン分布は、起こりにくい事象がほぼ独立に多数あるときに必ず現れる。完全順列はその古典的な例であり、第 12 章の Section 12.11 の主題でもある。

モンモールの *treize* ゲーム

フランスの貴族ピエール・レモン・ド・モンモール（Pierre Rémond de Montmort）は、著書 *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*（『偶然のゲームに関する解析の試論』、1708 年）で賭けごとを研究した。*treize*（13）というゲームでは、プレイヤーが「1、2、3、…」と数を唱えながら 13 枚のカードを配り、配ったカードが唱えた数と一度でも一致すれば勝ちとなる。モンモールは勝つ確率を求め、ニコラウス・ベルヌーイ（Nicolaus Bernoulli）との書簡のやりとりを通じて、1713 年までに一般的な公式が確立された。オイラー（Euler）は 1753 年にこれを再発見した。包除原理はその後、ド・モアブル（Abraham de Moivre）によって、また一般的な形では 19 世紀にシルベスター（James Joseph Sylvester）によって定式化された。

次の一歩

1 **ユニフォーム。** STEP III 2004、問 12（step.maths.org/questions/04-s3-q12）に挑戦せよ。この問題では、自分のユニフォームを着ている選手の人数を指示変数を用いて数え、平均と分散を求め、その結果をポアソン分布と比較する。

2 **漸化式。** n 個の対象の完全順列の個数を D_n とする。カード 1 がどこへ行くか、そしてその位置にあったカードが位置 1 へ行くかどうかを考えることにより、漸化式（recurrence）$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ を示せ。$D_3 = 2$、$D_4 = 9$ と照らし合わせて確かめよ。

3 **ちょうど k 枚。** ちょうど k 枚のカードが自分の位置にある確率は $\frac{1}{k!}d_{n-k}$ であり、それが $\frac{e^{-1}}{k!}$ に近づくことを示せ。

4 **互いに素な整数。** 包除原理を用いて、1 から 30 までの整数のうち 2、3、5 のいずれでも割り切れないものの個数を求めよ。その答えは $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$ とどのような関係にあるか。

さらに学ぶために

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。包除原理と一致の問題を扱う大学 1 年生向けの教科書。
- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）、第 IV 章。一致の問題のさまざまな変形を収めた古典。
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。包除原理について。

詳しい解説付きの解答は第 9.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/derangements.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com