9.7 等しい累乗和

ワークシート

問題

STEP I 1992、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s1-q5

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　多項式（polynomial）$\mathrm{p}(x) = \sum c_k x^k$ が $\mathrm{p}(1) = 0$ を満たすとき、係数（coefficient）について何がいえるか。$\mathrm{p}'(1) = 0$ ならばどうか。

段階 1　三重根（triple root）

扱う内容：因数 $(1 - x)^3$

? **考えてみよう**　$1 - x^2$ と $1 - x^4$ をできるだけ因数分解（factorise）せよ。$1 - x$ という因数（factor）は全部でいくつ現れるか。

段階 2 1 における微分係数

扱う内容：$\mathrm{p}_0'(1) = 0$ と $\mathrm{p}_1'(1) = 0$

手を止めて、やってみよう $\mathrm{p}_0(x) = (1-x)^3\mathrm{q}(x)$ とおき、積の微分法（product rule）を用いて微分せよ。p_0' は $1-x$ の何乗で割り切れるか。$\mathrm{p}_1 = x\mathrm{p}_0'$ についてはどうか。p_1' についてはどうか。

段階 3 係数を読み取る

扱う内容：二つの恒等式

考えてみよう p_0 を展開せよ。$\mathrm{p}_0'(1)$ と $\mathrm{p}_1'(1)$ を係数（coefficient）c_k を用いて表せ。$+1$ はどこにあり、-1 はどこにあるか。

段階 4　もう一つの因数

扱う内容：最後の小問

> **手を止めて、やってみよう**　3 乗の和も等しくするには、$1-x$ という因数がもう一つ、つまり四つ目が必要である。p_0 に $1-x^8$ を掛けよ。0 から 15 までの係数の符号を読み取り、符号に従って数を二つの組に分けよ。

背後にある数学

トゥエ–モース数列

$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\cdots$ の係数の符号は**トゥエ–モース数列**をなす。$+$ を 0、$-$ を 1 と書くと次のようになる：

$$0110100110010110\ \ldots$$

互いに同値な 3 通りの記述がある。

- **倍化：** 0 から始め、手元の列の補数（complement、0 と 1 を入れ替えたもの）を後ろにつなげることを繰り返す：$0 \to 01 \to 0110 \to 01101001 \to \cdots$。
- **2 進数の桁：** 第 k 項は、k を 2 進法（binary）で書いたときの 1 の個数が偶数なら 0、奇数なら 1 である。（x^k の符号が $(-1)^{\text{2 進表記中の 1 の個数}k}$ となるのはこのためである。積から x^k を作るには、k の 2 進表記を構成する因数 x^{2^m} を選ぶことになり、その一つ一つが負の符号をもたらす。）
- **多項式：** 問題にあるとおり、$\prod_m (1-x^{2^m})$ の係数。

$0, 1, \ldots, 2^N-1$ をトゥエ–モース数列で分けると、$r < N$ を満たすすべての r について r 乗の和が等しい 2 つの集合が得られる（図 9.7.1）。これは *Prouhet–Tarry–Escott* 問題（Prouhet–Tarry–Escott problem）、すなわち $r = 1, \ldots, k$ に対して r 乗の和が等しくなる、異なる 2 つの整数の集合を見つける問題である。Prouhet の解は 2^{k+1} 個の数を使

う。本当に必要な数の個数がどこまで少なくできるかは、有名な未解決問題（open problem）である。

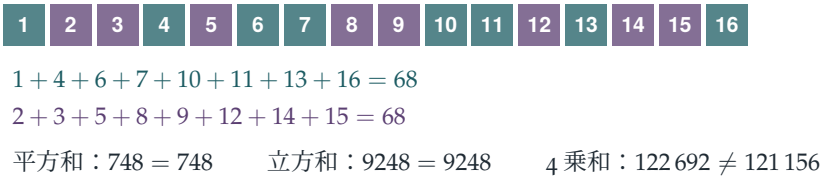

図 9.7.1 トゥエ–モース数列で分けた 1 から 16 までの数。2 つの集合は和、平方の和、立方の和がそれぞれ等しいが、4 乗の和は等しくない。そのためには 1 から 32 までが必要である。色を左から右へ読むと、青緑–紫–紫–青緑、紫–青緑–青緑–紫、…というパターンになる。

最も公平な交代の仕方

2 人の子どもが、山積みのお菓子から良いものから順に交代で選んでいく。$ABABAB\ldots$ と交互に選ぶと、各ペアで A が常に良い方を取ることになり、系統的に有利になる。$ABBA$ の順の方が公平であり、$ABBABAAB$ はさらに公平である。これがトゥエ–モース数列であり、冪の和が釣り合うことがまさにその理由である。お菓子の価値が位置の滑らかな関数で与えられるとき、その関数を多項式として展開すると、トゥエ–モース順がその主要な項を打ち消すことがわかる。同じ考え方はサッカーの PK 戦（penalty shoot-out）にも提案されており（サッカーの競技規則を定める団体が 2017 年から試行した「$ABBA$」方式）、テニスのタイブレーク（tie-break）におけるサーブの順番にも使われている。

トゥーエ、モース、ユーワ

この数列は何度も発見されてきた。Prouhet は 1851 年にこれを用いた。トゥーエ（Axel Thue）は 1912 年、繰り返しパターンを含まない数列を研究する中でこれを再発見した。この数列は同じブロックを 3 回続けて含むことがない（「立方自由」（cube-free）である）。モース（Marston Morse）は 1921 年、曲面上の測地線（geodesic）の研究で再びこれを見いだした。そしてチェスの世界チャンピオンであるマックス・ユーワ（Max Euwe）は 1929 年、これを用いて、当時施行されていた同一局面の繰り返しによる引き分けの規則では無限に長い対局を防げないことを示した。今日では、n の 2 進数の桁を読む単純な機械によって計算される数列である**自動数列**（automatic sequences）の理論における中心的な例となっている。

次の一歩

1 **ずらし。** STEP II 2025、問 8（OCR が配布している 2025 年の過去問一式に収録、www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）に挑戦してみよう。和と平方の和が釣り合う分け方から、一方のリストをずらして組み合わせることで、立方の和まで釣り合うより大きな分け方を作る方法がわかる。

2 **平方数の平方和。**（これも STEP II, 2025 より。）集合 $A = \{1, 3, 4, 5, 9, 11\}$ と $B = \{2, 6, 7, 8, 10\}$ は、和が等しく、平方の和も等しい。すべての正の整数 n について、$\{n^2, (n+1)^2, \ldots, (n+11)^2\}$ を和の等しい 2 つの集合に分けよ。（**ヒント：**2 つ目の集合に 0 を加えよ。）

3 **平行移動不変性（translation invariance）。** 2 つの数の集合が $r = 0, 1, \ldots, k$ について r 乗の和が等しいならば、すべての要素に同じ数 c を加えて得られる集合もそうであることを示せ。このことから、問題の集合 $\{1, \ldots, 15\}$ を任意の連続する 16 個の整数に置き換えてもよいのはなぜか。

4 **公平なお菓子。** お菓子の価値が $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$ であるとする。順番 $ABABABAB$ と $ABBABAAB$ のそれぞれについて、A が得る合計を比較せよ。

さらに学ぶために

- **Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit,「The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence」**, *Sequences and Their Applications* 所収（Springer, 1999）。この数列のさまざまな登場場面を概観したサーベイ。オンラインで無料で読める。
- **Matt Parker, *Things to Make and Do in the Fourth Dimension***（Penguin）。冪の和が等しくなる例をはじめ、数にまつわるさまざまな不思議を収める。
- **Joshua Cooper & Aaron Dutle,「Greedy Galois games」**, *American Mathematical Monthly* 120 (2013)。公平な交代とトゥエ–モース数列について。

詳しい解説付きの解答は第 9.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/equal-power-sums.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com