# 9.6 奇妙なサイコロ

## ワークシート

### 問題

**STEP I 1993、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s1-q1

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　1 個目のサイコロには $i$ と書かれた面が $p_i$ 面、2 個目のサイコロには $j$ と書かれた面が $q_j$ 面あるとする。合計 $t$ を出す方法は何通りあるか。

### 段階 1　両端から考える

扱う内容：新しい目の付け方を求める

? **考えてみよう**　2 つのサイコロ（dice）を $A, B$ とし、$i$ の目が書かれた面の数をそれぞれ $a_i, b_i$ とする。合計 2 を出す方法はない。このことから $a_1 b_1$ について何がわかるか？合計 3 を出す方法は 2 通りある。それはどの積から生じるか？

### 段階 2 下から順に上へ

扱う内容：新しい目の付け方を求める

> **手を止めて、やってみよう** $A$ に 1 の目があるとすると、$b_1 = 0$ である。$(a_1, b_2)$ については 2 つの場合がある。合計 4、続いて合計 5 についての方程式を書き下し、それぞれの場合について解け。

### 段階 3 場合 (a) はうまくいかない

扱う内容：新しい目の付け方を求める

> **考えてみよう** $a_1 = 2, b_2 = 1$ の場合に、合計 7 についての方程式を書け。$B$ の面のうち、5 と 6 の目に使える面はいくつ残っているか？それは可能か？

### 段階 4　場合 (b) はうまくいく

扱う内容：新しい目の付け方を求める

> **考えてみよう**　もう一方の場合では、合計 6 と 11 についての式と、合計 12 が出ないことから $a_6 b_6 = 0$ となることを用いよ。最後に、得られたサイコロで表全体が再現されることを確かめよ。

## 背後にある数学

### 多項式としてのサイコロ

各サイコロを、$i$ と書かれた面 1 つにつき項 $x^i$ を 1 つもつ多項式として表す。普通のサイコロは $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ であり、問題のサイコロは

$$A(x) = x + x^4 + x^5 + 3x^6, \qquad B(x) = 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5.$$

である。掛け合わせると、面の各組は $x^i x^j = x^{i+j}$ を与えるので、$A(x)B(x)$ における $x^t$ の係数は合計 $t$ を出す方法の数になる。これは再び Section 9.4 の母関数（generating function）の考え方である。合計の表はまさに積 $A(x)B(x)$ にほかならず、先ほどの場合分けによる推論は、それを因数分解する一つの方法だったのである。

### シッカーマンのサイコロ

普通のサイコロ 2 個の場合、積は $(x + x^2 + \cdots + x^6)^2$ である。合計が同じになるサイコロの組はどれも、$P(x)Q(x) = (x + \cdots + x^6)^2$ を満たす多項式 $P(x), Q(x)$ をもたなければならない。そこで因数分解すると

$$x + x^2 + \cdots + x^6 = x(1 + x)(1 + x + x^2)(1 - x + x^2),$$

となり、これらの因数は（整数係数の多項式として）これ以上分解できない。よって $P$ と $Q$ はそれぞれ因数 $x, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 - x + x^2$ から作られ、各因数は全体でちょうど 2 回ずつ現れる。次の 3 つの条件によって選び方が絞られる。

- 各サイコロは 6 面をもつので $P(1) = Q(1) = 6$ である。各因数は $x = 1$ で値 1, 2, 3, 1 をとるので、各サイコロは $1 + x$ と $1 + x + x^2$ を 1 つずつもつ。
- 0 と書かれた面はないので $P(0) = Q(0) = 0$ である。よって各サイコロは因数 $x$ を 1 つずつもつ。
- 残る自由度は、2 つの $1 - x + x^2$ をどう分けるかだけである。1 つずつ分ければ普通のサイコロになる。両方を一方のサイコロに入れると

$$x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$
$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

  となる。

これがシッカーマンのサイコロ 1,2,2,3,3,4 と 1,3,4,5,6,8 であり（図 9.6.1）、この議論によって、これが普通のサイコロ以外の唯一の組であることが証明される。鍵となる事実は、多項式も整数と同様に既約元（irreducible）の積へ一意に分解される（unique factorisation）ということである。ここで整数論と組合せ論が出会うのである。

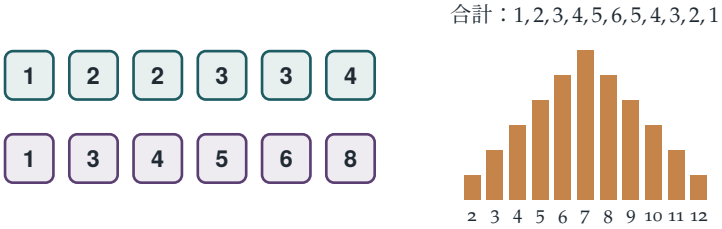



**図 9.6.1**　シッカーマンのサイコロ。2 個を同時に投げると、2 から 12 までのすべての合計が、普通のサイコロ 2 個とまったく同じ頻度で出る（右）。合計 2 は 1 通り、合計 3 は 2 通り、というように続き、合計 7 は 6 通りである。

### 確率母関数

確率論では、同じ考え方が**確率母関数**（probability generating function）として現れる。値 $0, 1, 2, \ldots$ をとる確率変数（random variable）$X$ に対して $\mathrm{G}(t) = \mathrm{E}(t^X) = \sum \mathrm{P}(X = k)t^k$ と定め、$X$ と $Y$ が独立（independent）ならば $\mathrm{E}(t^{X+Y}) = \mathrm{E}(t^X)\mathrm{E}(t^Y)$ が成り立つ。独立な確率変数の和は、母関数の積に対応するのである。STEP III 2003 Q14（演習問題にある）はこの方法でシッカーマンのサイコロを求めており、Section 9.13 では関連する議論を用いて、2 個のサイコロにどのような偏りをもたせても、すべての合計を同じ確率にすることはできないことを示す。

## 次の一歩

1. **四面体のサイコロ。** STEP III 2003、問 14（step.maths.org/questions/03-s3-q14）に挑戦せよ。これは 4 面のサイコロについてシッカーマンの問いを考えるものである。（**ヒント：**$x+x^2+x^3+x^4=x(1+x)(1+x^2)$。）

2. **表の確認。** $(x+x^4+x^5+3x^6)(2x^2+x^3+x^4+2x^5)$ を展開し、問題の表と照らし合わせよ。

3. **3 個のサイコロ。** 正の整数が書かれた 6 面サイコロ 3 個で、すべてが標準のものではなく、合計の分布が標準のサイコロ 3 個と同じになるものは存在するか。（**ヒント：**今度は $(x+\cdots+x^6)^3$ の因数に $1-x+x^2$ が 3 つ含まれる。）

4. **硬貨と八面体。** $1,\ldots,8$ と書かれた 8 面サイコロと、1,2 と書かれた 2 面の「サイコロ」（硬貨）がある。合計が同じになるように、これらに別の数を書き直すことはできるか。

## さらに学ぶために

- **Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers***（Mathematical Association of America）。シッカーマンのサイコロについてのコラムを収録している。
- **Joseph Gallian & David Rusin, 「Cyclotomic polynomials and nonstandard dice」**（円分多項式と非標準的なサイコロ）、*Discrete Mathematics* 27 (1979)。任意の面数のサイコロについての一般論である。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（オンラインで無料公開）、第 1 章。

詳しい解説付きの解答は第 9.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/strange-dice.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com