9.5 両替の仕方

ワークシート

問題

STEP I 1997、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/97-s1-q1

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> ? **考えてみよう**　2p 硬貨と 1p 硬貨だけを使って n ペンスを作る方法は何通りあるか。答えが 2p 硬貨を何枚使うかだけで決まるのはなぜか。

段階 1　10 ペンス

扱う内容：10 ペンスを作る

> ? **考えてみよう**　大きい硬貨から順に場合分けする。10p 硬貨を使うか、使わないかのどちらかである。使わない場合、5p 硬貨は何枚使えるか。そのうえで、残りの金額を 2p 硬貨と 1p 硬貨で作る方法の数を数えよ。

段階 2 一段ずつ積み上げる

扱う内容：20 ペンスを作る

手を止めて、やってみよう 5p、2p、1p 硬貨で n ペンスを作る方法の数を $b(n)$ とする。5p 硬貨の枚数を決めることで、$b(n)$ を「2p と 1p で作る方法の数」の値の和として表せ。$n = 0, 5, 10, 15, 20$ について表を作るとよい。

考えてみよう 次に、求めた b の値を使って、同じ方法で 10p 硬貨を加えよ。

段階 3 20 ペンス

扱う内容：20 ペンスを作る

考えてみよう 最後に、20p 硬貨を使うか、使わないかのどちらかである。それぞれを足し合わせよ。

背後にある数学

等比級数としての硬貨

この問題を代数に変える考え方を述べよう。使う 5p 硬貨の枚数は $0, 1, 2, \ldots$ であり、それぞれ $0, 5, 10, \ldots$ ペンスに寄与する。これを次の級数として記録する。

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

各硬貨について同じことを行い、掛け合わせる。

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \sum_{n} w(n) x^n.$$

括弧を展開すると、各項 x^n は各括弧から一つずつ項を選ぶこと、すなわち各硬貨の枚数を選ぶことで、合計額が n となる場合から生じる。したがって x^n の係数 $w(n)$ は、n ペンスを作る方法の数にちょうど等しい。段階 2 の表は、この積を括弧一つずつ展開していたにすぎない。これは Section 9.4 の母関数（generating function）の考え方であり、その威力が発揮されるのが掛け算である。母関数の積は、選択の組合せを数えるのである。

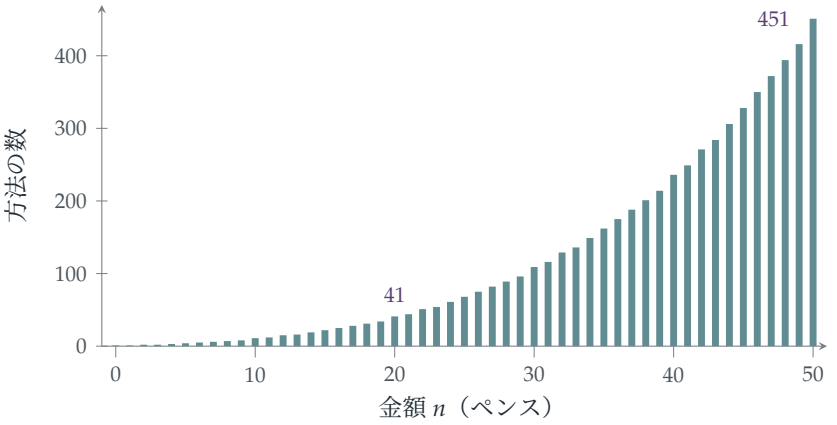

図 9.5.1　1p、2p、5p、10p、20p、50p 硬貨で n ペンスを作る方法の数。5 と 10 の倍数のところでの跳ね上がりは、新しい硬貨が初めて使えるようになる場所を示している。硬貨が 6 種類のとき、方法の数はおおよそ n^5 のように増加する。一般には、硬貨の種類の数より 1 小さい次数の多項式のように増加する。

分割

すべての正の整数が硬貨として使えるとしたらどうなるだろうか。このとき、順序を無視して n を正の整数の和として表す方法の数が**分割数**（partition number）$p(n)$ である。たとえば $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$ であるから $p(4) = 5$ である。オイラーは 1748 年に

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots},$$

であることを見抜き、これを用いて驚くべき恒等式を発見した。その一つは、n を**相異なる**部分の和として表す方法の数が、**奇数**の部分の和として表す方法の数に等しいというものである。（その証明は母関数を使えばわずか 1 行の代数計算である。演習で試してみよ。）

ハーディ、ラマヌジャンと $p(200)$

分割数は急速に増加する。$p(10) = 42$、$p(100) = 190\,569\,292$ である。1918 年、G. H. ハーディ（Hardy）とシュリニヴァーサ・ラマヌジャン（Srinivasa Ramanujan）は $p(n)$ に対する驚くべき公式を発見した。それは無限級数であり、その第 1 項は

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

である。これを検証するため、Percy MacMahon はオイラーの恒等式を用いて $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$ を手計算で求めた。ハーディとラマヌジャンの級数の最初の数項は、誤差 1 未満で正しい答えを与えた。ラマヌジャンはまた、$p(5n+4)$ は常に 5 で、$p(7n+5)$ は 7 で、$p(11n+6)$ は 11 で割り切れることも発見した。このような規則性がほかに存在しない理由が解明されたのは、21 世紀になってからである。

次の一歩

1 **2 種類の 6。** STEP II 2012、問 1（step.maths.org/questions/12-s2-q1）に挑戦せよ。これは等比級数の積を用いて数える問題である。最後に、その係数が答えとなるような硬貨の数え上げ問題を述べよ。

2 **相異なる部分と奇数の部分。** $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ が相異なる部分への分割の母関数であることを示せ。$1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$ を用いて、これが $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$ に等しいことを示し、オイラーの定理を導け。$n=6$ の場合に確かめよ。

3 **公式。** 1p、2p、5p 硬貨だけを用いて n ペンスを作る方法の数は、$\frac{(n+4)^2}{20}$ に最も近い整数であることを示せ。（まず小さい n で確かめよ。）

4 **順序を区別する。** 1p 硬貨と 2p 硬貨を 1 枚ずつ投入口に入れて n ペンスにする方法は、順序を区別すると何通りあるか。（この数列には以前に出会っているはずである。）

さらに学ぶために

- **George Andrews & Kimmo Eriksson, *Integer Partitions***（Cambridge University Press）。学部生向けの、短く読みやすい入門書。
- **ポリア（George Pólya）,「On picture-writing」**, *American Mathematical Monthly* 63 (1956)。1 ドルを両替する問題（方法は 292 通りある）を用いて母関数を説明した、ポリアによる古典的な解説。
- **Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity***（Abacus）。ラマヌジャンの生涯と、ハーディとの共同研究を描いた伝記。

詳しい解説付きの解答は第 9.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/making-change.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com