9.4 関数としての数列

ワークシート

問題

STEP I 2016、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/16-s1-q8

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　母関数（generating function）が $\dfrac{1}{1-x}$ である数列は何か。$\dfrac{1}{1-2x}$ ではどうか。数列の母関数に x を掛けると、数列はどうなるか。

段階 1 自然数（natural numbers）と三角数（triangle numbers）

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう $(1-x)^{-2}$ と $(1-x)^{-3}$ を二項級数（binomial series）によって展開せよ。それぞれにおける x^n の係数（coefficient）は何か。また、x を掛けるとどうなるか。

手を止めて、やってみよう n^2 を n と $\frac{1}{2}n(n+1)$ を用いて表せ。母関数（generating function）は、数列と同じように足し合わせることができる。

段階 2　漸化式（recurrence relation）が方程式になる

扱う内容：小問 (ii)(a)

> **手を止めて、やってみよう**　$u_n = k u_{n-1}$ の両辺に x^n を掛け、$n \geq 1$ を満たすすべての n について和をとれ。左辺の和には $n = 0$ の項が欠けていることに注意して、両辺をそれぞれ $\mathrm{f}(x)$ を用いて表せ。

段階 3　フィボナッチ数（Fibonacci numbers）

扱う内容：小問 (ii)(b)

> **考えてみよう**　$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ についても同様に、$n \geq 2$ にわたって和をとれ。それぞれの和には、はじめのほうのどの項が欠けているか。そのうえで $u_0 = 0$ と $u_1 = 1$ を用いよ。

段階 4 1/89 **の謎を解く**

扱う内容：問題の先へ

? **考えてみよう** 小問 (ii)(b) の答えに $x = \frac{1}{10}$ を代入せよ。何に気づくか。

背後にある数学

母関数から公式へ

母関数は数列を符号化するだけではない。数列を求めることもできる。分母は $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$ と因数分解される。ここで $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ は $t^2 = t + 1$ の解である。部分分数分解（partial fractions）により

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\right),$$

となり、それぞれの分数を等比級数として展開すると

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

これがビネ（*Binet*）の公式である。$|\psi| < 1$ であるから第 2 項は非常に小さく、したがって F_n は $\varphi^n/\sqrt{5}$ に最も近い整数である。また、隣り合うフィボナッチ数の比は黄金比（golden ratio）に収束する（Section 2.2 の主題である）。同じ方法で、定数係数の線形漸化式（linear recurrence）はどれも解くことができる。演習には STEP I 2004 の例を含めてある。

母関数がこれほど役に立つ理由

真の威力は掛け算をするときに現れる。積 $\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)$ における x^n の係数は $\sum_k u_k v_{n-k}$ であり、これは n を二つの部分に分けるすべての方法にわたる和である。これはまさに、二つの部品から組み立てられたものを数えるのに必要なものである。続く二つの節では、これを用いて両替の方法の数を数え（Section 9.5）、普通のさいころと同じ目

の和の分布をもつ、奇妙な目のさいころを見つける（Section 9.6）。確率論では、同じ考え方から**確率母関数**（probability generating function）が得られ、独立な確率変数（independent random variables）の和を積に変える。

ド・モアブル、オイラー、ラプラス

アブラーム・ド・モアブル（Abraham de Moivre）は 1720 年代に、本質的には上の方法によって、母関数を用いて線形漸化式を解いた。レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler）は 1748 年に、自然数の分割（partitions）を研究するために母関数を用い、ピエール＝シモン・ラプラス（Pierre-Simon Laplace）は母関数を著書 *Théorie analytique des probabilités*（『確率の解析的理論』、1812 年）の基礎に据えた。20 世紀には母関数は組合せ論の中心的な道具となり、現在では解析的な方法（母関数を複素変数（complex variable）の関数として調べること）により、厳密に解くにはあまりに複雑な数え上げの問題に対しても、精密な評価が得られるようになっている。

次の一歩

1 **2 桁ずつ。** STEP II 2022、問 3（OCR が配布している 2022 年の過去問一式に収録、www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip）に挑戦せよ。$\frac{1}{89}$ の小数展開がフィボナッチ数で始まる理由を説明し、さらに、小数展開にこのパターンが 2 桁ずつ現れる分数を求める問題である。

2 **漸化式を解く。** STEP I 2004、問 7（step.maths.org/questions/04-s1-q7）に挑戦せよ。母関数と部分分数分解を用いて線形漸化式を解き、次にその方法を逆向きにたどる問題である。

3 **数を数える。** $\frac{1}{9801} = 0.00\,01\,02\,03\,04\ldots$ となり、2 桁ずつの区切りが 1 ずつ増えていくことを示せ。このパターンが最初に崩れるのはどこか。また、それはなぜか。

4 **平方の和。** $\frac{1}{1-x}f(x)$ が部分和（partial sums）$u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ の母関数であることを説明せよ。このことと小問 (i) の答えを用いて、$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ の公式を求めよ。

さらに学ぶために

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A K Peters、オンラインで無料公開）。母関数への古典的な入門書。この節の後に読むには第 1 章が最適である。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-

Wesley、邦訳『コンピュータの数学』)、第 7 章。

- **Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics***（Cambridge University Press、オンラインで無料公開。『解析的組合せ論』)。大学 1 年の水準をはるかに超えるが、冒頭の数ページを読めば、この分野がどこへ向かうのかがわかる。

詳しい解説付きの解答は第 9.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/generating-functions.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com