9.3 柵の杭を塗り分ける

ワークシート

問題

STEP II 1995、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q2

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **手を止めて、やってみよう**　円形に並んだ 3 本の柱、4 本の柱の塗り方をそれぞれ数えよ。$3 \times 2^{n-1}$ は数えすぎになっているか。なっているとすれば、どれだけ多いか。

段階 1　2 種類の塗り分け

扱う内容：$r_{n+1} = s_n$ となる理由と、$r_n + s_n$ を求めること

> **手を止めて、やってみよう**　$n+1$ 本の杭の塗り分け（colouring）で、最初と最後の杭が赤であるものを考えよ。杭 n は何色になりうるか。最後の杭を取り除くと、n 本の杭のどの種類の塗り分けが残るか。逆向きにたどることはできるか。

? **考えてみよう** $r_n + s_n$ は、最初の杭が赤である n 本の杭の塗り分けをすべて数えたものである。最初の杭より後の各杭について、選び方は何通りあるか。

段階 2 帰納法による公式の証明

扱う内容：帰納法（induction）

? **考えてみよう** $n = 1$ の場合を確かめよ。次に、$r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$ と r_n の公式を用いて整理せよ。

段階 3　円周上の場合

扱う内容：円周上に並んだ杭

> **手を止めて、やってみよう**　杭 1 を赤に固定し、杭 n と杭 1 の間で円を切り開いて、杭が一列に並ぶようにせよ。一列の塗り分けはどのような追加の条件を満たさなければならないか。そのような塗り分けを数えるのは r_n と s_n のどちらか。杭 1 の色は何通りありうるか。

背後にある数学

彩色多項式

柱とその隣接関係は**グラフ**（graph）をなす。一列の場合は道（path）、円形の場合は閉路（cycle）である。**正しい彩色**（proper colouring）とは、隣り合う頂点に異なる色を塗る塗り方である。k 色による正しい彩色の個数は k の多項式であり、これをそのグラフの**彩色多項式**という。これは 1912 年にバーコフ（George Birkhoff）によって導入された。問題の議論を k 色で繰り返すと

$$\text{道：} k(k-1)^{n-1}, \qquad \text{閉路：} (k-1)^n + (-1)^n (k-1).$$

が得られる。$k = 3$ のとき、閉路の公式は $2^n + 2(-1)^n$ となる。バーコフは、あらゆる地図のグラフの彩色多項式が $k = 4$ で正であることを示すことによって、四色定理（どんな地図も、隣り合う国が異なる色になるように 4 色で塗り分けられる）を証明しようとした。この方法は結局成功しなかった。四色定理は 1976 年に Kenneth Appel と Wolfgang Haken によって、計算機を大規模に援用して最終的に証明された。彩色多項式は今なお活発な研究分野であり、統計物理学と意外なつながりをもっている。統計物理学では、彩色多項式は磁性の**ポッツ模型**（Potts model）として現れるのである。

行列による同じ数え上げ

第 7 章の線形代数を用いて、答えを別の見方で捉えることもできる。対角成分が 0 でそれ以外の成分が 1 である 3×3 行列を $\mathbf{M}$ とする。すなわち、(i,j) 成分は、色 i の次に色 j が来てよいとき 1 である。すると、$\mathbf{M}^{n-1}$ の (i,j) 成分は、色 i で始まり色 j で終わる一列の塗り方の個数を表すので、r_n は $\mathbf{M}^{n-1}$ の対角成分の 1 つである。円形の塗り方は、n ステップ後に出発点に戻る列であるから、円形の塗り方の個数は $\mathbf{M}^n$ の**トレース**（trace）である。$\mathbf{J}$ をすべての成分が 1 である行列として $\mathbf{M}=\mathbf{J}-\mathbf{I}$ であるから、$\mathbf{M}$ の固有値（eigenvalue）は $3-1=2$（固有ベクトル（eigenvector）$(1,1,1)$）と -1（重複度 2）であり、$\mathbf{M}^n$ のトレースは固有値の n 乗の和である：

$$\operatorname{tr}\mathbf{M}^n = 2^n + (-1)^n + (-1)^n = 2^n + 2(-1)^n.$$

この**転送行列**（transfer matrix）法は、1 ステップずつ組み立てられる配置を数えるために、組合せ論や統計物理学の至るところで用いられている。

次の一歩

1. **k 色の場合。** この問題を k 色で考え直せ。$r_{n+1}=s_n$ が依然として成り立ち、$r_{n+1}+r_n=(k-1)^{n-1}$ となることを示し、r_n を求め、閉路の彩色多項式 $(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$ を導け。

2. **赤が 2 つ続かない。** 一列に並んだ n 本の柱を赤または白に塗るとき、隣り合う 2 本の柱がともに赤にならない塗り方は何通りあるか。（フィボナッチ（Fibonacci）数が現れるはずである。）

3. **車輪。** 円形に並んだすべての柱に隣接する中心の柱を加える（これを「車輪」という）。これを 4 色で塗る方法は何通りあるか。（**ヒント**：中心は 1 色を使い、円は残りの 3 色を使わなければならない。）

4. **ネックレス。** 円形の 2 つの塗り方について、一方が他方を回転したものであるとき同じものとみなすことにすると、$n=4$ のとき異なる塗り方は何通りあるか。$n=5$ のときはどうか。（これが**バーンサイド（*Burnside*）の補題**の出発点である。）

さらに学ぶために

- **Robin Wilson, *Introduction to Graph Theory***（Pearson）。『グラフ理論入門』。定番の入門書であり、彩色と四色問題を扱っている。
- **Robin Wilson, *Four Colours Suffice***（Penguin）。『四色で十分』。一般読者向けの、四色定理の物語。

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（オンラインで無料公開）。『母関数学』。漸化式とその解き方を、転送行列法も含めて解説している。

詳しい解説付きの解答は第 9.3 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/fence-posts.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com