9.2 ミニチュア版ラムゼーの定理

ワークシート

問題

STEP I 1989、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/89-s1-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **考えてみよう**　6 個の点が意味をもつのは、どの 2 点の組がどの色で結ばれているかという点だけであり、幾何学的な配置は目くらましにすぎない。線分は全部で何本あり、各点からは何本出ているか。

段階 1　5 本の線分と 2 色

扱う内容：6 点

> **考えてみよう**　点 A からは 5 本の線分（segment）が出ており、それぞれ金色か銀色で塗られている。どちらの色も高々 2 本ずつ、ということはあり得るだろうか。少なくとも 3 本について何が言えなければならないか。

段階 2 反対側の端点に注目する

扱う内容：6 点

手を止めて、やってみよう たとえば AB、AC、AD がすべて金色であるとする。ここで三角形 BCD に注目する。その辺のどれか 1 本でも金色であれば何が起こるか。また、1 本も金色でなければどうか。

段階 3　5 点では足りない

扱う内容：5 点

考えてみよう　5 点の場合、各点から出る線分は 4 本しかないので、どの点でも各色 2 本ずつにすることを試みることができる。5 点を正五角形（regular pentagon）の頂点として配置し、辺を一方の色で、対角線（diagonal）をもう一方の色で塗ってみよ。単色の三角形（one-colour triangle）は存在するだろうか。

背後にある数学

ラムゼー数

ラムゼー数（Ramsey number）$R(s,t)$ とは、K_N の辺を金色と銀色でどのように塗り分けても、金色の K_s（s 個の点からなる集合で、それらの間の辺がすべて金色であるもの）か銀色の K_t が必ず含まれるような最小の N のことである。この問題は $R(3,3)=6$ を示したことになる。6 点では必ず成り立ち、五角形の例は 5 点では成り立たないことを示している。

フランク・ラムゼー（Frank Ramsey）は 1928 年に、これらの数が常に存在すること、すなわち任意の s と t に対して条件を満たす N が存在することを証明した。その証明は上の議論を一般化した帰納法（induction）であり、$R(s,t) \le R(s-1,t)+R(s,t-1)$ を示すものである。しかし、正確な値を求めることは途方もなく難しい。

$$R(3,3)=6, \qquad R(4,4)=18, \qquad 43 \le R(5,5) \le 46.$$

$R(4,4)$ の値は 1955 年に求められた。膨大なコンピュータ探索にもかかわらず、$R(5,5)$ はいまだに分かっていない。上界（upper bound）46 が証明されたのは、ようやく 2024 年のことである。コンピュータで K_{43} のすべての塗り分けを単純に調べることはできない。塗り分けは 2^{903} 通りあり、宇宙に存在する原子の数よりはるかに多いのである。

エルデシュと宇宙人

ラムゼー理論の発展に誰よりも貢献したポール・エルデシュ（Paul Erdős）は、次のような話を好んで語った。宇宙人が地球に侵攻してきて、$R(5,5)$ の値を教えなければ地球を滅ぼすと脅したとしよう。そのときは、あらゆるコンピュータと数学者を総動員すべきであり、そうすれば値が見つかるかもしれない。しかし、もし彼らが $R(6,6)$ を求めてきたら、宇宙人を滅ぼすことを試みるべきだ、と。エルデシュはまた 1947 年に、驚くべき方法を用いて $R(k,k) > 2^{k/2}$ を証明した。彼は、$2^{k/2}$ 個未満の点の上で**ランダムに**色を塗ったグラフが単色の K_k を含まない確率が正であることを示したのである。したがって、どのように構成すればよいかは誰にも分からないにもかかわらず、条件を満たす塗り分けが存在しなければならない。この**確率的方法**（probabilistic method）は、今日では組合せ論における最も強力な道具の一つとなっている。

混沌からの秩序

ラムゼーの定理には多くの親戚があり、どれも同じ考え方、すなわち十分に大きな構造は秩序を避けられないという考え方を表している。**ファン・デル・ヴェルデンの定理**（van der Waerden's theorem）は、整数を有限個の色で塗り分けると、いくらでも長い単色の等差数列（arithmetic progression）が存在することを述べている。**エルデシュ–セケレシュの定理**（Erdős–Szekeres theorem）は、相異なる n^2+1 個の数からなる任意の数列が、長さ $n+1$ の増加部分列または減少部分列（subsequence）を含むことを述べている。そしてラムゼー自身は論理学の問題に関心をもっていた。彼はこの定理を、論理的な命題の真偽の判定に関する論文の中で、補題（lemma）として証明したのである。

次の一歩

1. **少なくとも 2 つ。** K_6 の任意の 2 色による塗り分けにおいて、実は単色の三角形が少なくとも 2 つ存在することを示せ。（**ヒント：**「二色の角」、すなわち共通の頂点で色の異なる 2 辺の組を数えよ。金色の辺を g 本、銀色の辺を $5-g$ 本もつ点は、このような角 $g(5-g) \le 6$ 個の頂点となっている。単色でない三角形はそれぞれ、このような角をちょうど 2 つ含む。）

2. **3 色。** K_{17} の辺を 3 色で塗り分けると、単色の三角形が存在することを示せ。（**ヒント：**ある点は同じ色の辺を少なくとも 6 本もつ。）

3 **3 と 4。** $R(3,4) \le 10$ を示せ。すなわち、K_{10} を金色と銀色でどのように塗り分けても、金色の三角形か銀色の K_4 が存在することを示せ。（**ヒント：**各点は、金色の辺を少なくとも 4 本もつか、銀色の辺を少なくとも 6 本もつかのいずれかである。）実際には $R(3,4) = 9$ である。

4 **単調部分列。** $n = 2$ の場合のエルデシュ–セケレシュの定理を証明せよ。すなわち、相異なる 5 個の数からなる任意の数列は、長さ 3 の増加部分列または減少部分列を含むことを示せ。また、どちらも含まない 4 個の数からなる数列を求めよ。

さらに学ぶために

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。鳩の巣原理とラムゼー理論の章。
- **Ronald Graham & Joel Spencer,「Ramsey theory」**, *Scientific American*（1990 年 7 月）。第一線の研究者 2 人による一般向けの入門記事。
- **Noga Alon & Joel Spencer, *The Probabilistic Method***（Wiley）。エルデシュの方法に関する標準的な本。第 1 章は取り組みやすい。
- **Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers***（Fourth Estate）。エルデシュの伝記（邦訳『放浪の天才数学者エルデシュ』）。

詳しい解説付きの解答は第 9.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/ramsey.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com