9.13 いかさまサイコロ

ワークシート

問題

STEP I 1999、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s1-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$x > 0$ に対して $x + \frac{1}{x} \geq 2$ をどのように証明するか。等号が成り立つのはどのようなときか。

段階 1　両端の合計

扱う内容：小問 (i)

? **考えてみよう**　目の合計が 2 および 12 になる確率（probability）を、q_i と r_j を用いて表せ。11 通りの合計がすべて確率 $\frac{1}{11}$ で現れると仮定すると、どのような方程式が得られるか。

段階 2 真ん中の合計

扱う内容：小問 (i)

手を止めて、やってみよう 合計 7 をつくる方法のうち 2 通りは、目 1 と 6 だけを使う。それらの確率を書き下し、先に得た方程式を用いて q_1 と q_6 を消去せよ。不等式（inequality）$x + \frac{1}{x} \geq 2$ はどこで使えるか。

段階 3　1 個のさいころを 2 回投げる

扱う内容：小問 (ii)

> **考えてみよう**　2 回の結果が一致する確率は $q_1^2 + \cdots + q_6^2$ である。q_j の和が 1 であるという条件のもとで、この値はどこまで小さくなりうるか。$q_j = \frac{1}{6} + e_j$ とおいてみよ。

背後にある数学

多項式による証明

ここでは Section 9.6 の母関数（generating function）を用いた、まったく別の証明を紹介する。$Q(x) = q_1 x + \cdots + q_6 x^6$、$R(x) = r_1 x + \cdots + r_6 x^6$ とおく。すべての合計の確率が $\frac{1}{11}$ であるとすると

$$Q(x)R(x) = \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}}{11} = \frac{x^2}{11}(1 + x + \cdots + x^{10}).$$

ここで $Q(x)/x$ は実数係数の 5 次多項式であり、奇数次の実数係数多項式はすべて実数解をもつ（グラフが $-\infty$ から $+\infty$ へ、あるいはその逆へ向かうからである）。よって左辺は 0 でない実数解をもつ。ところが $1 + x + \cdots + x^{10} = \frac{x^{11}-1}{x-1}$ であり、その解は 1 以外の 11 乗の単位根（roots of unity）で、そのどれも実数ではない。これは矛盾である。同じ議論により、$n - 1$ が奇数のとき、すなわち n が偶数のとき、二つの n 面さいころにどのような細工をしても合計を等確率にはできないことがわかる。（n が奇数のときは多項式による議論にはさらに工夫が必要であるが、上の相加平均・相乗平均の不等式による証明はすべての $n \geq 2$ で通用する。）

衝突確率

小問 (ii) の量 $\sum q_j^2$、すなわち独立な二回の抽出が一致する確率は、分布の**衝突確率**（collision probability）とよばれる。小問 (ii) は、これが一様分布のとき最小になるこ

とを示している。衝突確率は分布がどれほど集中しているかを測る量である。生態学では、q_j をある生息地における種 j の割合として、$\sum q_j^2$ はシンプソンの多様度指数（Simpson's index）である。経済学では市場集中度を表すハーフィンダール指数（Herfindahl index）であり、暗号理論ではパスワードの分布がどれほど推測されやすいかを測る。さらにこれは Section 9.9 の最後で述べたこと、すなわち誕生日の確率が不均等であれば誕生日が一致する確率は大きくなるしかない、ということを説明している。

不可能性の証明

数学で最も有名な結果のいくつかは、何かができないことを主張するものである。2 乗して 2 になる分数は存在しない。定規とコンパスによる作図で任意の角を三等分することはできない。冪根を用いた公式ですべての五次方程式を解くことはできない。あらゆる数学的命題の真偽を判定するアルゴリズムは存在しない。これらはどれもその分野を変えた。なぜなら、**どの**方法もうまくいかないことを証明するには、方法の全体を理解しなければならないからである。細工したさいころの問題はその縮図である。あらゆる細工を排除するために、どの細工も従わねばならない不変な性質（相加平均・相乗平均の不等式）が必要であった。

次の一歩

1. **コーシー＝シュワルツの不等式。** コーシー＝シュワルツの不等式 $(\sum a_j b_j)^2 \le \sum a_j^2 \sum b_j^2$ を $a_j = q_j$、$b_j = 1$ として用い、小問 (ii) の一行の証明を与えよ。

2. **異なる二つのさいころ。** 異なる二つの細工したさいころをそれぞれ一回ずつ振るとき、同じ目が出る確率は $\frac{1}{6}$ より小さくなりうるか。0 になりうるか。

3. **別の目をもつさいころでの一様な合計。** 目の数の付け方が異なれば、二つのさいころで合計を等確率にできることを示せ。一方のさいころの目を $0,1,2,3,4,5$、もう一方を $0,6,12,18,24,30$ としてみよ。どのような合計が現れるか。これが問題と矛盾しないのはなぜか。

4. **三つのさいころ。** 目が 1 から 6 である三つの細工した六面さいころで、3 から 18 までのすべての合計を等確率にできるか。（**ヒント**：合計 3、8、13、18 と、六つの数に対する相加平均・相乗平均の不等式を用いよ。今回、多項式による証明がうまくいかないのはなぜか。）

さらに学ぶために

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。相加平均・相乗平均の不等式から始まる、不等式への美しい入門書。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。母関数と、上のような証明におけるその使い方。
- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）、冒頭の数章。五次方程式に関する、あらゆる不可能性の証明の中で最も有名なもの。

詳しい解説付きの解答は第 9.13 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/loaded-dice.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com