9.12 ランダムな部分集合

ワークシート

問題

STEP III 2019、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　$\{1, \dots, n\}$ の部分集合を、「はい／いいえ」で答える n 個の問いへの答えの列で表すにはどうすればよいか。

段階 1　1 つの要素

扱う内容：小問 (i)

? **考えてみよう**　1 を含まない各部分集合（subset）を、それに 1 を加えて得られる部分集合と対にしてみよ。1 を含む部分集合は全体のどれだけの割合を占めるか。

段階 2 互いに素な集合

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう A_1 と A_2 が互いに素（disjoint）であるのは、両方に属する要素が 1 つもないときであり、またそのときに限る。1 つの要素について、同様に確からしい 4 通りの可能性を書き出してみよ。そのうち禁じられるのはどれか。また、n 個の要素にわたって確率を掛け合わせてよいのはなぜか。

考えてみよう m 個の集合について、ある要素がそのすべてに属する確率はいくらか。

段階 3　部分集合

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう　$A_1 \subseteq A_2$ となるためには、1 つの要素についての 4 通りの可能性のうち、どれが禁じられるか。

手を止めて、やってみよう　鎖（chain）$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ について、1 つの要素が各集合に「含まれる・含まれない」の 8 通りのパターンを書き出してみよ。ある要素が鎖のある集合に含まれたら、その要素は他にどこに含まれなければならないか。許されるパターンの数を数え、次に m 個の集合についても同じことを行え。

背後にある数学

確率を使わずに数える

選び方の総数を掛けると、各確率は個数に変わる。$A_1 \subseteq A_2$ を満たす順序対 (A_1, A_2) の個数は $4^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3^n$ である。これらの組は直接数えることもできる。A_2 の大きさ k を選び、次に A_2 そのものを $\binom{n}{k}$ 通りの方法で選び、さらに A_1 をその 2^k 個の部分集

合のいずれかとして選ぶ。したがって

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

となり、これは $(1+2)^n$ に対する二項定理（binomial theorem）である。同じものを二通りの方法で、一度は要素ごとに、一度は大きさごとに数えることで、恒等式が証明される。これが**二重数え上げ**（*double counting*）の方法であり、Section 7.9 で正多面体とともに出会ったものである。同様に、鎖 $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$ の個数は $(m+1)^n$ である。

部分集合の束

$\{1, \dots, n\}$ の部分集合全体は、包含関係によって順序づけると、**ブール束**（*Boolean lattice*）と呼ばれる構造をなす。これは n 次元の立方体として図示できる。各部分集合は頂点であり、その「はい／いいえ」の答えの列によってラベルづけされ、辺に沿って移動することは要素を一つ加えるか取り除くことに対応する。鎖は上向きに進む経路である。部分集合の族に条件を課したとき、その族がどこまで大きくなりうるかを記述する深い結果がある。**シュペルナー**（*Sperner*）**の定理**（1928 年）は、どの集合も他の集合を含まないような族のうち最大のものは $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 個の集合からなることを主張する。**エルデシュ–コー–ラドー**（*Erdős–Ko–Rado*）**の定理**（1961 年）は、どの二つも重なり合うように k 元集合を最大でいくつ選べるかを述べる。どちらも組合せ論（combinatorics）の最初の講義で標準的に扱われるものであり、部分集合を硬貨投げとして見る視点は、それらの最も鮮やかな証明のいくつかを与える。

ブールの代数

ジョージ・ブール（George Boole）の *The Laws of Thought*（『思考の法則』、1854 年）は、論理的な命題を集合として扱い、「かつ」「または」「でない」を共通部分、和集合、補集合として扱った。集合を「はい／いいえ」の答えの列として符号化することは、まさにコンピュータが集合を表現する方法である。$\{1, \dots, 64\}$ の部分集合は一つの 64 ビットの数であり、共通部分は「ビットごとの AND」命令である。この問題の方法、すなわち要素（ビット）を一つずつ考えることは、こうした演算を解析する方法そのものである。

次の一歩

1. **被覆。** $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 = S)$ および $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S)$ を求めよ。

2. **同じ大きさ。** $\mathrm{P}(|A_1| = |A_2|) = \binom{2n}{n}/4^n$ を示せ。（**ヒント：** $|A_1| = |A_2|$ となるのは $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$ のときであり、またそのときに限る。）さらに、n が大きいと

き、これがおよそ $1/\sqrt{\pi n}$ であることを示せ。

3 **三つへの分割。** S の互いに素な部分集合の順序対 (A, B) の個数が 3^n であることを示し、互いに素な部分集合の順序を考えない組 $\{A, B\}$ の個数を求めよ。

4 **小さい n に対するシュペルナーの定理。** $n = 3$ および $n = 4$ のそれぞれについて、どの集合も他の集合を含まないような $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合の族のうち最大のものを求めよ。

さらに学ぶために

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。部分集合と半順序集合に関する章。
- **Béla Bollobás, *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability***（Cambridge University Press）。シュペルナーの定理から始まる、部分集合の族についての短く優美な本。
- **Peter Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms***（Cambridge University Press）。二通りに数えることに重点を置いた入門書。

詳しい解説付きの解答は第 9.12 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/random-subsets.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com