9.10 いつでもおつりを渡せる

ワークシート

問題

STEP I 2011、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/11-s1-q12

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　£1 の客が来るたびに硬貨が 1 枚増え、£2 の客が来るたびに（釣り銭として）1 枚減る。行き詰まるのはどのようなときか。

段階 1　£2 硬貨が 1 枚

扱う内容：小問 (i)

? **考えてみよう**　£2 硬貨を持つ客が 1 人のとき、どのような場合に行き詰まるか。この客が列の先頭にいる確率（probability）はいくらか。

段階 2 £2 硬貨が 2 枚

扱う内容：小問 (ii)

手を止めて、やってみよう 最初の人は £1 硬貨を持っていなければならない。次に、2 番目の人で場合分けする。それが £1 硬貨なら、もう安全といえるか。それが £2 硬貨なら、どの状況に戻ることになり、小問 (i) を使うことができるか。

段階 3 列を経路とみなす

扱う内容：小問 (iii)

考えてみよう 場合分けによる方法は $n = 3$ でも通用するが、長くなる。代わりに、手元にある £1 硬貨の枚数を、対応を終えた人数に対してグラフに描いてみよ。うまくいく列はどのような経路（path）になるか。

段階 4　鏡映

扱う内容：小問 (iii)

> **手を止めて、やってみよう**　悪い経路、すなわち高さ -1 に達する経路をとる。初めて -1 に達するまでの部分を、直線 $y=-1$ に関して折り返す（鏡映（reflection））。新しい経路はどこから始まりどこで終わるか。それらの点を結ぶすべての経路を数えよ。

背後にある数学

カタラン数

$m=n$（£1 硬貨がぎりぎり足りる場合）のとき、成功する列の個数は

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

であり、これは第 n **カタラン数** C_n：$1,1,2,5,14,42,132,\ldots$ である。リチャード・スタンレー（Richard Stanley）の著書 *Catalan Numbers* には、カタラン数が数える対象が 200 以上も挙げられている。その中には、n 組の括弧を正しく並べる方法の数（「(())()」はよいが「())(()」はだめである。これは「(」を £1、「)」を £2 とみれば硬貨の議論そのものである）、$n+2$ 角形を互いに交わらない対角線で三角形に分割する方法の数、$n+1$ 個の因数の積に括弧をつける方法の数などがある。

ランダムウォーク

列はランダムウォーク（random walk）であり、鏡像原理はランダムウォークを調べるための基本的な道具の 1 つである。たとえば鏡像原理から、0 から出発する公平なランダムウォークはいつか必ず 0 に戻ること、また最初の $2n$ 歩の間ずっと正であり続ける確率が $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}2^{-2n}\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$ であることがわかる。連続版では、同じ折り返しの議論を**ブラウン運動**（Brownian motion）に適用すると、その最大値の分布が得られる。

これは、株価がある障壁を一度でも越えるかどうかで支払いが決まる、ある種の金融オプションの価格づけの基礎になっている。

ベルトランの投票問題

1887 年、ジョゼフ・ベルトラン（Joseph Bertrand）は次の問いを立てた。候補者 A が a 票、B が $b < a$ 票を得る選挙において、開票の間ずっと A が真に B をリードしている確率はいくらか。答え $\frac{a-b}{a+b}$ は同じ年にデジレ・アンドレ（Désiré André）によって証明され、その議論は通常、鏡像原理として記憶されている（ただし歴史家たちは、アンドレの実際の証明は少し異なる全単射を用いていたと指摘している）。本問のくじ引きの問題は、同点を許す変形版である。すなわち成功とは、£1 の人数が £2 の人数を一度も**下回らない**ことである。演習問題の 1 つで、ベルトランの答えを本問の答えから導く。

次の一歩

1. **3 枚の場合を場合分けで。** 小問 (ii) と同様に、列の最初の数人で条件づけて小問 (iii) を証明せよ。鏡像原理がどれほどの手間を省いてくれるかがわかるだろう。

2. **ベルトランの投票問題。** ある選挙で A は a 票、B は $b < a$ 票を得る。開票の間ずっと A が真にリードしている確率が $\frac{a-b}{a+b}$ であることを示せ。（**ヒント**：最初の 1 票は A でなければならない。その後、A が B に後れをとる差は決して…を超えてはならない。）

3. **括弧。** 3 組の括弧の正しい並べ方 5 通りと、五角形を三角形に分割する方法 5 通りをすべて書き出せ。両者の間の全単射を見つけられるか。

4. **£5 紙幣。** 価格 £1 のチケットを買う列に、£1 硬貨を持つ人が m 人、£5 紙幣を持つ人が n 人いる。鏡像原理ではもはや簡単な答えが得られない理由を説明せよ。（この一般化ははるかに難しい。）

さらに学ぶために

- **ウィリアム・フェラー（William Feller）, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley）、第 III 章。ランダムウォークと鏡像原理についての古典的な解説。
- **Richard Stanley, *Catalan Numbers***（Cambridge University Press）。200 を超える解釈を演習問題とともに収録。

- **Marc Renault,「Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem」**, *American Mathematical Monthly* 115 (2008)。鏡像原理の歴史。

詳しい解説付きの解答は第 9.10 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/ballot.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com