9.1 平面を分割する直線

ワークシート

問題

STEP II 1990、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

> **手を止めて、やってみよう**　直線を一般の位置（general position）に保ちながら（どの 2 本も平行でなく、どの 3 本も 1 点を通らない）、$n = 1, 2, 3, 4$ の場合を丁寧に描け。それぞれの場合について、線分（segment）と領域（region）の個数を数えよ。規則性を推測できるだろうか。

段階 1　線分を数える

扱う内容：線分の個数

> **手を止めて、やってみよう**　直線を 1 本ずつ見ていこう。ほかの直線のうち何本がその直線と交わり、交点は何個あるか。それらの点によって、その直線はいくつの部分に分けられるか。最後に、直線の本数を掛ければよい。

段階 2 直線を 1 本加えると何が起こるか

扱う内容：領域の個数

考えてみよう $n-1$ 本の直線を引き、そこに n 本目を加える。n 本目の直線は、ほかの直線によって n 個の線分（segment）に分けられる。各線分は、それが通る領域（region）に対して何をするか。

段階 3　漸化式を解く

扱う内容：領域の個数、その公式

考えてみよう　漸化式（recurrence）$R(n) = R(n-1) + n$ が得られているはずである。$R(0) = 1$（または $R(1) = 2$）から始めて足し合わせるか、あるいは数学的帰納法（induction）によって公式を証明せよ。

背後にある数学

姿を変えたオイラーの公式

ここでは第二の証明を示す。これは答えを単に導くだけでなく、その理由を説明するものである。直線の配置を地図とみなそう。交点を**頂点**（vertex）、線分を**辺**（edge）、領域を**面**（face）とする。頂点は $V = \binom{n}{2}$ 個（直線の各組に 1 つ）、辺は $E = n^2$ 本ある。無限に伸びる線分には端が 1 つしかないので、それらがすべて集まる「無限遠」の頂点を 1 つ追加する。すると、図は球面上に描かれた地図になる（平面を球に巻きつけ、無限遠が頂上にくる様子を想像せよ）。Section 7.9 のオイラーの公式 $V - E + F = 2$ から

$$\left(\binom{n}{2} + 1\right) - n^2 + F = 2, \qquad \text{よって} \qquad F = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

まったく異なる方向から、同じ数が得られた。領域はまた、種類によってきれいに分けられる。そのうち $2n$ 個は非有界であり（隣り合う無限半直線の各組の間に 1 つずつ）、残りの $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) - 2n = \binom{n-1}{2}$ 個は有界である。

二項係数と高次元

この公式は

$$R(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2},$$

と書くことができ、これは偶然ではない。どの直線も水平にならないように図を回転させる。下に有界な領域には最低点があり、それは交点でなければならない。また、

各交点はちょうど 1 つの領域（そのすぐ上にある領域）の最低点である。これにより、直線の各組に 1 つずつ、$\binom{n}{2}$ 個の領域が得られる。それ以外の領域はどこまでも下に伸びているので、すべての交点よりはるか下に引いた水平線と交わる。n 本の直線はその水平線を $n+1$ 個の区間に分け、そのような領域のそれぞれに 1 つずつ区間がある。合計で $\binom{n}{2}+n+1$ となる。3 次元では、一般の位置にある n 枚の平面は空間を

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

個の部分に分け（**ケーキ数**（cake numbers）$1,2,4,8,15,26,\ldots$）、この規則性はあらゆる次元で続く。証明は同じ帰納法である。新しい平面は他の平面によって、平面上の直線と同じ配置の領域に分けられ、それらの領域のそれぞれが空間の一部分を 2 つに分ける。

シュタイナーと超平面配置

直線や平面によって分けられる領域の個数の公式は、1826 年にヤコブ・シュタイナー（Jakob Steiner）によって発見された。今日、これは**超平面配置**（hyperplane arrangements）の理論の出発点となっている。この理論は、一般の位置にないものも含め、直線、平面、およびそれらの高次元版の任意の集まりが作る領域を数えるものである。1975 年の Thomas Zaslavsky による注目すべき定理は、どの超平面どうしが交わるかを記述する多項式を用いて、任意の配置の領域の個数を数える。同じ考え方は機械学習にも現れる。「ReLU」ユニットで構成されたニューラルネットワークは、超平面によって入力空間を領域に分け、その領域の個数は、ネットワークがどれほど複雑な関数を表現できるかの尺度となる。

次の一歩

1. **円。**どの 2 つも 2 点で交わり、どの 3 つも 1 点を通らない n 個の円は、平面を n^2-n+2 個の領域に分けることを示せ。

2. **平行な直線。**n 本の直線のうち k 本が互いにすべて平行である（それ以外は一般の位置にある）とき、領域はいくつあるか。

3. **ケーキ数。**一般の位置にある n 枚の平面が空間を $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 個の領域に分けることを、帰納法によって証明せよ。

4. **崩れる規則性。**円周上に n 個の点をとり、すべての 2 点の組を弦で結ぶ。ただし、円の内部でどの 3 本の弦も 1 点を通らないものとする。$n=1,2,3,4,5$ のとき、領域は $1,2,4,8,16$ 個になる。$n=6$ のときの領域の個数を数えよ。（**ヒント：**

オイラーの公式を用いよ。4 点の組それぞれから交点が 1 つできる。）その個数が $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$ であることを示せ。

さらに学ぶために

- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）、第 1 章。まさにこの問題と、その「ピザ」版および「ジグ」版から始まる。
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。親しみやすい入門書で、帰納法、グラフ、オイラーの公式の章がある。
- **Richard Guy, “The strong law of small numbers”**、*American Mathematical Monthly* 95 (1988)。一見明らかに見えて実は誤りである規則性が数多く紹介されており、演習問題の円の問題も含まれている。

詳しい解説付きの解答は第 9.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/lazy-caterer.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com