8.8 周期 3 ならばカオス

ワークシート

問題

STEP III 2025、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　$y = 7 - 2|x|$ のグラフはどのような形か。直線 $y = x$ とどこで交わるか。区間（interval）$[-7, 7]$ をどこへ写すか。

段階 1　$\mathrm{f} \circ \mathrm{f}$ のグラフ

扱う内容：小問 (i)(a)

考えてみよう　x が -7 から 0 まで動くとき、$\mathrm{f}(x)$ は $[-7, 7]$ 全体を動く。では、この区間で $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ はどう振る舞うか。0 から 7 まではどうか。

段階 2 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ を解く

扱う内容：小問 (i)(b) と (c)

考えてみよう 解のうち二つは f の不動点（fixed point）である。なぜそれらは $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ の解にもなるのか。

手を止めて、やってみよう それ以外の解 p に対して $q = \mathrm{f}(p)$ とおくと、$\mathrm{f}(q) = p$ である。p と q は同符号になりうるか。なりえないならば、p と q についての一次方程式（linear equation）を二つ立てて解け。$[-7, 7]$ の外に解がないことも確かめよ。

段階 3　遅れてサイクルに入る

扱う内容：小問 (i)(d)

考えてみよう　$a = \frac{28}{5}$ から始めて最初の数項を計算せよ。いつ 2-サイクル（cycle）に合流するか。

段階 4 3-サイクル

扱う内容：小問 (ii)(a) と (b)

考えてみよう $a = 1$ と $a = -\frac{7}{9}$ から始まる数列を計算せよ。

手を止めて、やってみよう $[-7, 7]$ において、$\mathrm{f} \circ \mathrm{f} \circ \mathrm{f}$ のグラフはいくつの線分からなり、それぞれの線分は $y = x$ と何回交わりうるか。すでにわかっている解の個数を数えよ。

段階 5　遅れて 3-サイクルに入る

扱う内容：小問 (ii)(c)

> **手を止めて、やってみよう**　小問 (i)(d) と同様に、サイクル $1 \to 5 \to -3$ から逆向きにたどれ。f によって 1 に移される数はどれか。そのうちサイクルに含まれないものを選び、さらに逆向きにたどり続けよ。

背後にある数学

あらゆる長さのサイクル

段階 4 の数え方は、何ステップの場合にも通用する。f を n 回適用したものを f^n と書く。$[-7,7]$ 上で f^n のグラフは、高さ全体にわたる 2^n 本の線分からなるので、$\mathrm{f}^n(x) = x$ はちょうど 2^n 個の解をもつ。そのうちいくつかは n を割り切るより短い周期 d をもつが、各 d についてそれらは高々 2^d 個であり、

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad (n \text{ の約数 } d < n \text{ についての和})$$

が成り立つ。なぜなら、n より小さい約数はすべて $n/2$ 以下であり、$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \le 2^n$ だからである。したがって、すべての n について周期がちょうど n である点が存在する。この関数はあらゆる長さのサイクルをもつ。

なぜ周期 3 がすべてを強制するのか

リーとヨークの定理によれば、これは私たちの関数に特有のことではない。区間からそれ自身への連続関数 g が 3-サイクルをもてば、**どのような**ものであっても、あらゆる長さのサイクルをもつ。証明には中間値の定理（intermediate value theorem）しか使わない。そして私たちの 3-サイクルが、その筋道を示してくれる。

考えてみよう サイクル $1 \to 5 \to -3$ の点の間にある2つの区間を $I_1 = [-3,1]$、$I_2 = [1,5]$ とする。f はそれぞれをどこへ写すか。

I_2 上で f は $f(1) = 5$ から $f(5) = -3$ まで減少するので、$f(I_2) = [-3,5] = I_1 \cup I_2$ である。I_1 上で f は $f(-3) = 1$ から $f(0) = 7$ まで増加し、$f(1) = 5$ まで減少するので、$f(I_1) = [1,7]$ であり、これは I_2 を含む。使ったのはサイクルの3点だけであることに注意しよう。$a < b < c$ である3-サイクル $a \to b \to c$ をもつ連続関数はどれも、同じように区間を覆う。どの区間がどの区間を覆うかを図にまとめることができる（図 8.8.3）：

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

定理は次の2つの事実から従う。どちらも中間値の定理の帰結である。

- $g(I) \supseteq I$ ならば、g は I 内に不動点をもつ。（$g(x) - x$ に中間値の定理を適用すればよい。）
- $g(I) \supseteq J$ ならば、$g(I') = J$ をちょうど満たす、より小さい閉区間 $I' \subseteq I$ が存在する。

周期 n の点を見つけるには、図の中でループ $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$ をたどる。I_2 の中で $n-1$ ステップ進み、1ステップだけ I_1 に出て戻ってくるのである。2つ目の事実を繰り返し使うと、I_2 を縮めて、軌道がこの遍歴（itinerary）に従う初期値の区間を得ることができ、g^n はその区間を I_2 全体の上へ写す。1つ目の事実から、$g^n(x) = x$ を満たし、ステップ $n-1$ でのみ I_1 を訪れる点 x が得られる。その周期は n より小さくはなりえない。もしそうなら、I_1 への訪問がもっと早く繰り返されるはずだからである。（I_1 と I_2 は点1を共有しているので、一つだけ微妙な点がある。それが問題を起こさないことの確認は演習とする。）

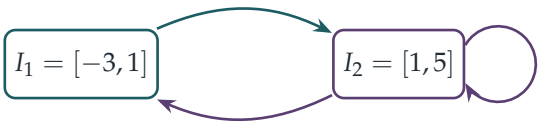


図 8.8.3 3-サイクルの被覆図（covering diagram）。ある区間から別の区間への矢印は、1つ目の区間の像が2つ目の区間を含むことを意味する。図の中のどのループも関数のサイクルを与える。ループ $I_2 \to I_2$ は不動点を、$I_1 \to I_2 \to I_1$ は2-サイクルを与え、I_2 のループを $n-1$ 回まわってから I_1 を訪れると、長さ n のサイクルが得られる。

シャルコフスキーの定理

リーとヨークが最初だったわけではない。1964年、ウクライナの数学者シャルコフ

スキー（Oleksandr Sharkovskii）は、はるかに完全な結果をすでに証明していた。それはロシア語で『*Ukrainian Mathematical Journal*』に発表され、西側では 10 年間知られていなかった。正の整数を次のように並べる。

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \dots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \dots,\ \ \dots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1 :$$

まず 3 以上の奇数、次に奇数の 2 倍、次に奇数の 4 倍、以下同様に続き、最後に 2 の累乗を減少する順に並べる。シャルコフスキーの定理によれば、区間上の連続関数が長さ m のサイクルをもてば、この並びで m より後にくるすべての長さのサイクルをもつ。3 が先頭にあるので、周期 3 はあらゆる周期を導く。しかもこの定理は最良である。すなわち、どの m についても、長さ m のサイクルをもち、並びでそれより前にくる長さのサイクルをもたない関数が存在する。末尾の 2 の累乗は、Section 8.7 のロジスティック写像における周期倍分岐のカスケード（period-doubling cascade）そのものであり、3-サイクルはそこで $k = 1+\sqrt{8}$ において現れる。

テント写像とロジスティック写像

$[0,1]$ を $[-7,7]$ の上へ写す置換 $x = 14y - 7$ を行う。簡単な計算により、f は**テント写像**（tent map）

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

になることがわかる。さらに置換 $u = \sin^2(\pi y/2)$ を行うと、テント写像はロジスティック写像（logistic map）$u \mapsto 4u(1-u)$ に変わる。つまりこの問題の関数は、Section 8.7 のカオス的なロジスティック写像をまっすぐに伸ばしたものである。$f^3(x) = x$ の 8 個の解は、$[0, \tfrac{\pi}{2}]$ における $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$ の 8 個の解に対応する。

次の一歩

1. **4-サイクル。** 被覆図を使って、f の 4-サイクルがどこにあるはずかを予想せよ（I_2 で 3 ステップ、I_1 で 1 ステップ）。次にそれを正確に求めよ。（**ヒント：**このサイクルは 3 つの正の点と 1 つの負の点をもつ。4 つの一次方程式を書き下せ。）

2. **微妙な点。** 周期 3 が周期 n を導くことの証明において、$n \ge 4$ のとき、得られた点 x が点 1（あるいは元の 3-サイクルのどの点）にもなりえない理由を説明せよ。

3. **周期 3 なしの周期 5。** $g(1)=3$、$g(3)=4$、$g(4)=2$、$g(2)=5$、$g(5)=1$ を満たし、これらの点を直線で結んだ $[1,5]$ 上の連続関数のグラフをかけ。区間 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ についてその被覆図をかけ。長さ 3 のループは見つかるか。（シャルコ

フスキーの定理によれば、3-サイクルは存在しない。）

4 **テント写像。** $x = 14y - 7$ によって f がテント写像になることを確かめよ。次に、テント写像は y を 2 進法で書いたものを 2 倍し、先頭の桁が 1 のときはすべての桁を反転させることを示し、これを用いてその 3-サイクルを求めよ。

さらに学ぶために

- **Tien-Yien Li & James Yorke, "Period three implies chaos"**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975). 短く、中間値の定理を知っていれば読める。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press). 学部生向けに書かれており、テント写像、ロジスティック写像、シャルコフスキーの定理を完全な証明つきで扱っている。
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011). 被覆図を用いた現代的な証明。

詳しい解説付きの解答は第 8.8 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/period-three.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com