8.7 解けるカオス

ワークシート

問題

STEP I 2014、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/14-s1-q6

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう** $s = \sin^2\theta$ として、式 $4s(1-s)$ をどこかで見たことはないだろうか。$\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$、$\sin 2\theta$ を結びつける恒等式は何か。

段階 1 パターンを推測する

扱う内容：小問 (i)：予想（conjecture）

? **考えてみよう** $u_0 = \sin^2\theta$ のとき、$1 - u_0$ は何になるか。倍角の公式（double-angle formula）を用いて、u_1 をひとつの平方の形で表せ。続いて u_2 についても同じことを行え。

段階 2 証明する

扱う内容：小問 (i)：証明

考えてみよう 推測した式を n についての数学的帰納法（induction）で証明せよ。帰納段階（inductive step）の計算は、θ を $2^n\theta$ に置き換えれば u_1 のときと同じである。

段階 3 変数を変換する

扱う内容：小問 (ii)：p, q, r に関する条件

手を止めて、やってみよう v_{n+1} を定める漸化式（recurrence relation）に $v_n = \alpha u_n + \beta$ を代入し、u_{n+1} について整理せよ。これを $4u_n - 4u_n^2$ と係数比較すると、方程式はいくつ得られ、未知数はいくつあるか。余った方程式が求める条件である。

段階 4 具体例

扱う内容：小問 (ii)：具体例

> **考えてみよう** p, q, r を読み取り、条件を満たすことを確かめよ。α と β、および初期値 u_0 を求めよ。$\sin^2\theta = u_0$ となる角 θ はどれか。

背後にある数学

数列が予測不能である理由

公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ を得たことで、話は終わったように見える。どの項も直接計算できるからである。しかし、この公式が何を言っているかをよく見てみよう。$\sin^2$ は周期 π をもつので、意味をもつのは $2^n\theta$ を π を法（modulo）として見た値だけである。$0 \le x < 1$ として $\theta = \pi x$ と書き、x を 2 進法（binary）で表す。

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots \quad (\text{基数}2).$$

2 を掛けると小数点が 1 桁右にずれ、その結果を 1 を法として見ると、小数点を越えた桁が捨てられる。したがって u_n は、x の 2 進表記の b_{n+1} 以降の桁だけで決まる。ロジスティック写像は 1 ステップごとに初期値の桁を 1 つ新たに読み込み、先頭の桁を 1 つ捨てていくのである。

これが**初期値鋭敏性**（sensitive dependence on initial conditions）であり、カオスを特徴づける性質である。2 進法で 20 桁（10 進法でおよそ 6 桁）まで一致する 2 つの初期値からは、たいてい、およそ 20 ステップまでは一致し、その後はまったく無関係になる数列が生じる（図 8.7.1）。u_{100} を予測するには、u_0 を 2 進法で 100 桁まで知る必要がある。初期の角の誤差は、どれほど小さくても、ステップごとに 2 倍になる。（個体数 u そのものの誤差が毎回まったく同じ倍率で増えるわけではない。写像は $[0,1]$ のある部分を他の部分より強く引き伸ばすからである。しかし平均すれば同じ割合で増大する。）公式はこの状況を救ってはくれない。単にその仕組みを目に見えるようにするだけである。

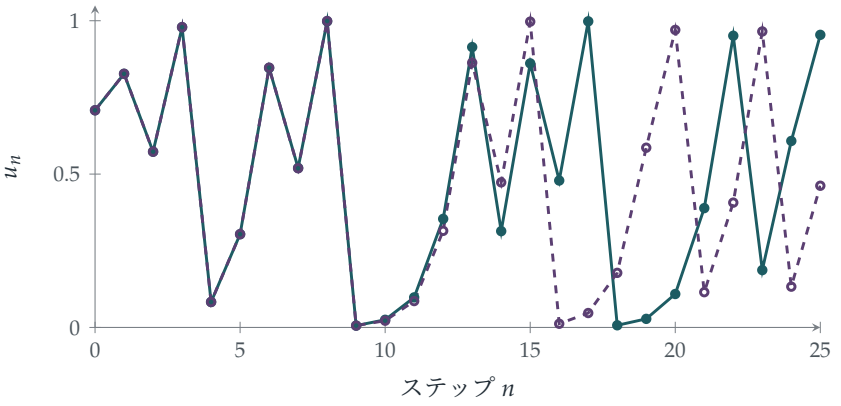


図 8.7.1　$k = 4$ のロジスティック写像による 2 つの数列。初期値は $\sin^2(1)$（ティール）と $\sin^2(1.00001)$（プラム、破線）である。およそ 10 ステップまでは区別がつかず、ステップ 12 までには目に見えて異なり、その後は無関係になる。ステップ 12 までに、角の差 10^{-5} は 12 回 2 倍されて、およそ $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$ になっている。

いたるところにある周期点

この公式からは、写像のすべての周期軌道（cycle）も求められる。数列が N ステップ後に初期値に戻るのは、ちょうど $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$、すなわち $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$ のときである。したがって $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ または $\theta = m\pi/(2^N + 1)$ は、周期が N の約数となる点を与える。たとえば $\theta = \pi/5$ は $4\theta \equiv -\theta$ を満たすので、$\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$ は周期 2 の軌道である。あらゆる周期の周期点（periodic point）が存在し、しかもそれらは $[0,1]$ において稠密（dense）である。つまり、どれほど小さな区間の中にも、数列が繰り返しになる初期値が存在する。それにもかかわらず、誤差は 2 倍になっていくので、どの周期点も不安定である。近くのものをすべて遠ざける周期点が稠密に存在すること、これがカオスの第二の特徴である。

カオスへの道

k がもっと小さいときには公式は存在せず、振る舞いは k によって劇的に変わる（図 8.7.2）。$1 < k < 3$ では、$(0,1)$ から出発するどの数列も不動点（fixed point）$1 - 1/k$ に落ち着く。$k = 3$ でこの不動点は不安定になり、代わって周期 2 の軌道が現れる（これが STEP II 2002 Q5 の主題である。演習問題を参照）。$k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ で周期 2 の軌道は周期 4 の軌道に取って代わられ、さらに周期 8 の軌道へと続く。この周期倍分岐（period doubling）はどんどん速く起こるようになり、$k \approx 3.5699$ で周期が無限大となってカオスが始まる。カオス領域の内部には秩序の「窓」がある。最もはっきりしたものは $k = 3.83$ 付近にあり、周期 3 の軌道を含む。これが Section 8.8 の主題で

ある。

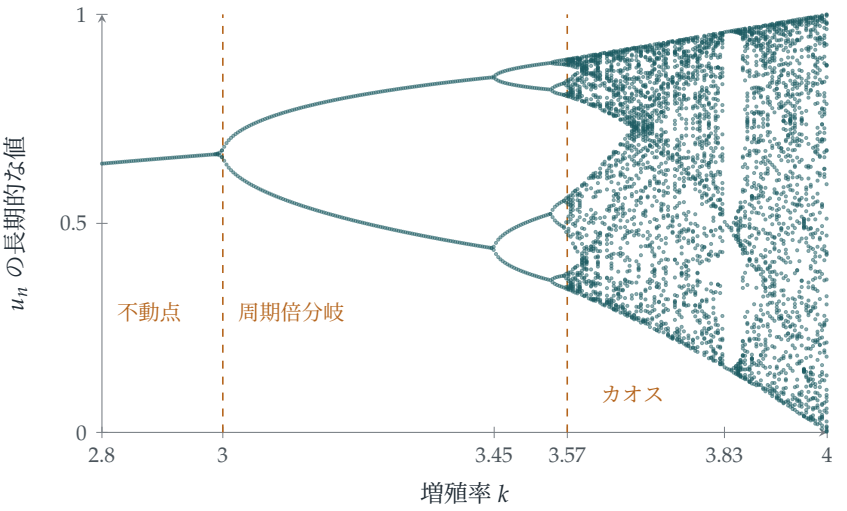


図 8.7.2　ロジスティック写像の分岐図（bifurcation diagram）。各 k について、$u_0 = 0.31416$ から写像を 300 回反復し、その次の 40 個の値をプロットした。ただ一つの不動点が $k = 3$ で周期 2 の軌道に分かれ、続いて周期 4、8、…と分かれていき、$k = 3.57$ 付近でカオスが始まる。$k = 3.83$ 付近の白っぽい縦の隙間が、安定な周期 3 の軌道を含む窓である。$k = 4$ では値が $[0, 1]$ 全体を埋め尽くす。

ファイゲンバウム定数

1975 年、ロスアラモスで研究していたファイゲンバウム（Mitchell Feigenbaum）は、プログラム可能なポケット電卓を使って、周期が倍になる k の値 $k_1 = 3$、$k_2 \approx 3.4495$、$k_3 \approx 3.5441$、$k_4 \approx 3.5644$、…を測定した。彼は、その間隔が一定の比で縮んでいくこと、

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

に気づいた。さらに驚くべきことに、同じ数 $4.6692\ldots$ が $x \mapsto k\sin(\pi x)$ についても、また山が一つで頂上が放物線のように丸い（**2 次の極大**（quadratic maximum）をもつ）他のあらゆる滑らかな写像についても現れることを発見した。この定数はそのクラス全体に対して**普遍的**（universal）なのである。頂上がもっと平らな山をもつ写像、たとえば $-x^4$ のような形の写像には、それ固有の普遍定数がある。この定数はその後、水滴がしたたる蛇口、加熱された流体、電子回路などの実験でも測定されている。その理由を説明するには相転移の物理学から借りてきた考え方が必要であり、1982 年になってようやく Oscar Lanford が計算機の助けを借りて厳密なものにした。

同じ技法が3度

小問 (ii) の置き換えは**共役**（conjugacy）の一例である。2つの写像は、変数変換によって一方が他方に変わるとき共役であるといい、そのとき両者はまったく同じ力学的振る舞いをもつ。この問題は、条件を満たすすべての2次写像が $k = 4$ のロジスティック写像と共役であり、そのロジスティック写像がさらに $u = \sin^2\theta$ を通して角の2倍化の変装したものであることを示している。（厳密には、この最後のつながりは**半共役**（semiconjugacy）である。θ と $\pi - \theta$ は同じ u を与えるので、この変数変換は1対1（one-to-one）ではない。ロジスティック写像が真の意味で共役になるのは**テント写像**（tent map）、すなわち $t \le \frac{1}{2}$ のとき $t \mapsto 2t$、$t \ge \frac{1}{2}$ のとき $t \mapsto 2 - 2t$ で定まる写像であり、そのときの変換 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$ は $[0,1]$ 上で1対1である。）Section 2.8 では、$x = 2\cos\theta$ とおくと各ステップで角が2倍になることによって解ける $x \mapsto x^2 - 2$ に出会った。これも条件を満たしている（確かめてみよ）。つまり、これらはすべて同じ写像が姿を変えたものなのである。Section 8.8 では、この仲間の3番目のメンバーとして、直線からできた写像である**テント写像**が登場する。

次の一歩

1. **ロジスティック写像の周期軌道。**STEP II 2002、問5（step.maths.org/questions/02-s2-q5）に取り組んでみよ。そのうえで、周期2の軌道が存在するのは $k > 3$ のときに限ることを示せ。

2. **2乗して2を引く。**$v_{n+1} = v_n^2 - 2$ が小問 (ii) の条件を満たすことを示せ（$p = -1$ として $-pv_n^2 + qv_n + r$ の形に書くこと）。α と β を求め、その答えが $v_n = 2\cos(2^n\phi)$ と一致することを確かめよ。

3. **周期3の軌道。**公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ を用いて、$u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ の周期3の軌道を求めよ。（**ヒント：**$\theta = \pi/7$ または $\theta = \pi/9$ を試してみよ。）周期がちょうど3である点はいくつあるか。

4. **失われる桁。**計算機は数を2進法でおよそ53桁まで記憶する。計算機で $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n)$ を反復すると、およそ何ステップで計算値が真の数列とまったく無関係になるか。そうなったとき、計算された数列は役に立たないのだろうか。

さらに学ぶために

- **Robert May,「Simple mathematical models with very complicated dynamics」**, *Nature* 261 (1976)。古典的な論文であり、今でも非常に読みやすい。

- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science*** (Penguin)。メイ、ファイゲンバウム、そしてカオスの発見の物語である。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*** (CRC Press)、第 10 章。1 次元写像、ロジスティック写像、ファイゲンバウム定数を、大学 1 年生の水準で扱っている。
- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?*** (Penguin)。カオスについての一般向けの解説書で、ロジスティック写像についての優れた章がある。

詳しい解説付きの解答は第 8.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/solvable-chaos.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com