8.5 グレイハウンドを追うグレイハウンド

ワークシート

問題

STEP III 1988、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/88-s3-q10

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　対称性から考えて、4 匹の犬は各瞬間にどのような図形をなすか。その中心はどこか。

段階 1　運動の向き

扱う内容：速度と動径のなす角

? **考えてみよう**　A は B に向かってまっすぐ走る。三角形 OAB の各角はいくらか。AB が AO となす角はいくらか。

段階 2 微分方程式

扱う内容：経路を求める

手を止めて、やってみよう A の速度を動径方向成分（radial component）$\dot{r}$ と横断方向成分（transverse component）$r\dot{\theta}$ に分解せよ。一方を他方で割って $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ を求め、それを解け。

段階 3　n 匹の犬

扱う内容：n 匹の犬への一般化

> **考えてみよう**　正 n 角形の場合、三角形 OAB の O における角はいくらか。二つの底角はいくらか。この角を 45° の代わりに用いて、第 2 段階をもう一度行え。

背後にある数学

無限回の回転、有限の距離

動径方向の速さ $\dot r = -v\sin\frac{\pi}{n}$ は一定なので、犬たちは時間 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ の後に中心に到達し、それぞれ距離 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$ を走ることになる。1 辺 s の正 n 角形では $r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$ なので、各犬が走る距離は

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

である。4 匹の場合、これはちょうど s であり、各犬はまさに 1 辺の長さだけ走る。（これを鮮やかに見る方法がある。B の速度は常に AB に垂直なので、距離 AB を変化させない。差を縮めるのは AB に沿ってまっすぐ速さ v で進む A の運動だけであり、最初の差は s である。）3 匹の場合は距離は $\frac{2}{3}s$、6 匹の場合は $2s$ である。それでもどの場合も、$r \to 0$ のとき $\theta \to \infty$ となるので、らせんは中心のまわりを無限回巻きつく。無限回巻きつく有限の長さの曲線は逆説ではない。巻きが十分速く小さくなるからである。

対数らせん

曲線 $r = \lambda e^{-k\theta}$ は**対数らせん**（logarithmic spiral）または**等角らせん**（equiangular spiral）と呼ばれ、中心から出るすべての半直線と同じ角度で交わる。形を保ったまま

成長すると、この曲線が生じるので、オウムガイの殻や一部の銀河の腕など、自然界にも現れる。ヤコブ・ベルヌーイ（Jacob Bernoulli）はこの曲線に魅了され、どの尺度で見ても同じに見えるという性質にちなんで、*Eadem mutata resurgo*（「変えられても、私は同じものとして甦る」）という銘とともに墓石に刻むよう頼んだ。ところが石工が刻んだのはアルキメデスのらせん（Archimedean spiral）であった。

実際の追跡

常に標的にまっすぐ向かう「純追跡」（pure pursuit）は、ミサイルや捕食者にとって最も単純な誘導則である。しかし最良ではない。標的がこれから**いるであろう**位置に向かうほうが（「比例航法」（proportional navigation））効率がよく、現代のミサイルも、トンボやハヤブサのような一部の捕食者も、実際にそうしている。追跡と回避の数学は、20 世紀に**微分ゲーム**（differential games）という名のもとで独立した分野となった。

次の一歩

1. **鮮やかな論法。** 4 匹の犬の問題で、距離 AB がちょうど速さ v で減少する理由を丁寧に説明し、犬たちが時間 s/v の後に出会うことを導け。

2. **3 匹の犬。** 3 匹の犬が 1 辺 s の正三角形の頂点から出発する。各経路の方程式、出会うまでの時間、各犬が走る距離を求めよ。

3. **何回転するか。** 4 匹の犬が中心から 100 m の位置から出発するとき、1 回転した後に中心からどれだけ近くにいるか。何回転した後に中心から 1 mm 以内に入るか。

4. **2 匹の犬。** $n = 2$（向かい合う 2 匹の犬）のときはどうなるか。公式はなお意味をもつか。

さらに学ぶために

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion***（Princeton University Press）。追跡曲線について、ブーゲからミサイルまであらゆることを扱う。
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。対数らせんとベルヌーイの墓石の話を含む。
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form***（Cambridge University Press）。らせん状の成長を含む、自然界の数学についての古典的名著。

詳しい解説付きの解答は第 8.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/pursuit.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com