8.4 渦を巻いて円に近づく

ワークシート

問題

STEP III 2015、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　どちらの方程式にも、$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ と $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ という組合せが形を変えて含まれている。これらは極座標ではどう表されるか。

段階 1　極座標による小問 (i)

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　方程式を変形して、$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ と $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ の組合せで表せ。展開して確かめよ。

手を止めて、やってみよう　この二つの組合せをそれぞれ $r\,\mathrm{d}r$ と $r^2\,\mathrm{d}\theta$ で置き換えよ。r を θ の関数とみたとき、どのような微分方程式（differential equation）が得られるか。それを解け。

段階 2　小問 (ii)

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　新しい方程式は、もとの方程式に $x^2 + y^2 = r^2$ を含む項を加えたものである。新しい項をまとめよ。二つの組合せのうちどちらが現れるか。

手を止めて、やってみよう　$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r$ が得られるはずである。$u = r^{-2}$ とおけ。u はどのような線形（linear）方程式を満たすか。

段階 3 三種類の解

扱う内容：解の形

考えてみよう $r^2 = \frac{1}{1+Ae^{2\theta}}$ を $A = 0$、$A > 0$、$A < 0$ の場合に分けて調べよ。それぞれの場合に、$\theta \to -\infty$ のとき、また θ が増加するとき、r はどうなるか。$A < 0$ のとき、θ はどの範囲の値をとりうるか。

背後にある数学

極限サイクル

アンリ・ポアンカレ（Henri Poincaré）は 1880 年代、平面上の微分方程式の定性的な振る舞いを研究する中で極限サイクルを導入した。問題の方程式を、平面上を動く点の軌跡を記述するものと解釈してみよう。単位円は孤立した閉軌道（closed orbit）であり、その近くの軌道はすべてそれに向かって巻きついていく（時間の向きによっては、それから離れていく）。1926 年、オランダの技術者 Balthasar van der Pol は真空管を含む電気回路に極限サイクルを見いだし、同様の方程式が心臓の鼓動を記述すると提唱した。極限サイクルは、自律的に維持される安定なリズムをもつあらゆる系のモデルとなる。概日時計、神経インパルス、捕食者と被食者の個体数の周期などである。

平面にカオスはない

ポアンカレ–ベンディクソンの定理（Poincaré–Bendixson theorem）によれば、平面上の滑らかな系において、有界な領域にとどまり、平衡点（equilibrium）に近づかない軌道は、必ず閉軌道に近づく。したがって 2 次元では、長時間の振る舞いは平衡点とサイクルに限られる。軌道は互いに交われないので、カオス（chaos）が入り込む余地はないのである。カオスには少なくとも 3 次元が必要であり、これは 1963 年にエドワード・ローレンツ（Edward Lorenz）が、対流を表す有名な 3 変数のモデル（「バタフ

ライ」）によって発見したことである。離散時間では、Section 8.7 で見るように、1 次元でさえカオスが起こりうる。

未解決問題

1900 年、ダフィット・ヒルベルト（David Hilbert）は第 16 問題の一部として、次のように問うた。P と Q が n 次の多項式であるとき、系 $x' = P(x,y)$、$y' = Q(x,y)$ がもちうる極限サイクルの個数の最大値はいくつか。これは $n = 2$ の場合でさえいまだにわかっていない。この場合、極限サイクルを 4 個もつ系は知られているが、それより多く存在しうるかどうかはわかっていない。ヒルベルトの問題のうち、完全に未解決のまま残っているごく少数の一つである。

次の一歩

1. **螺旋。** 小問 (i) の解 $r = e^{-\theta}$ について、曲線が原点から出るすべての半直線と同じ角度 45° で交わることを示せ。（対数螺旋が**等角螺旋**（equiangular spiral）とも呼ばれるのはこのためである。）

2. **極座標の恒等式。** $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ および $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$ を証明せよ。

3. **時間に関する系。** 系 $\dot r = r(1 - r^2)$、$\dot\theta = 1$ を考える。$r(0) > 0$ であるすべての解が、$t \to \infty$ のとき単位円に近づくことを示せ。また、この系を x と y で表せ。

4. **二つのサイクル。** $\dot r = f(r)$、$\dot\theta = 1$ の形の系で、$r = 1$ と $r = 2$ に極限サイクルをもち、一方が引き寄せ、他方が反発するものを求めよ。

さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形力学とカオス』。第 7 章で極限サイクルとポアンカレ–ベンディクソンの定理を扱っている。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Hyperion）。自然界のリズムと同期についての一般向けの本。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（Penguin）。ローレンツとカオスの発見の物語。

詳しい解説付きの解答は第 8.4 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/limit-cycle.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com