8.3 個体群の収穫

ワークシート

問題

STEP II 1995、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s2-q8

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　何かを解く前に、増加率 $(2K - x)x$ を x の関数としてグラフに描いてみよう。それはどこでゼロになるか。どこで正になるか。そこから x がどのように振る舞うかについて何がわかるか。

段階 1 ロジスティック方程式（logistic equation）を解く

扱う内容：除去がない場合の個体数

考えてみよう 変数を分離し（変数分離（separation of variables））、$\dfrac{1}{(2K-x)x}$ を部分分数（partial fractions）に分解せよ。

考えてみよう $t=0$ で $x=K$ であることを用いて定数を求めよ。次に x について解き、$t\to\infty$ のときどうなるかを調べよ。

段階 2　収穫（harvesting）

扱う内容：割合 L で除去する場合

考えてみよう　割合 L で細菌を除去すると、増加率から L が差し引かれる。$(2K-x)x-L$ を平方完成（completing the square）し、$K^2-L=\alpha^2$ とおけ。

手を止めて、やってみよう　$y=x-K+\alpha$ とおいて置換せよ。y はどのような方程式を満たし、$y(0)$ はいくらか。K を α に置き換えて、最初の部分と比較せよ。

背後にある数学

転換点（tipping point）

収穫のある方程式には $K+\alpha$ と $K-\alpha$ の二つの平衡点がある。上の平衡点は**安定**（stable）である。すなわち、それよりわずかに上または下にある個体群はそこへ戻っていく。下の平衡点は**不安定**（unstable）である。すなわち、$K-\alpha$ をわずかに下回る個体群は減少して絶滅に至る。収穫率 L が増加すると $\alpha=\sqrt{K^2-L}$ は小さくなり、二つの平衡点は互いに近づく。$L=K^2$ で両者は一つに合わさり、$L>K^2$ では平衡点

はまったく存在せず、どのような個体群も崩壊する（図 8.3.1）。これは**サドル・ノード分岐**（saddle-node bifurcation）と呼ばれ、最も単純な種類の**転換点**である。その厄介な点は、何の劇的な前兆もないことである。L が K^2 に近づいても平衡個体数はゆるやかに減少するだけであり、そして突然、平衡点が存在しなくなる。その後で収穫を減らしても役に立たないかもしれない。個体数がすでに不安定な閾値を下回っている可能性があるからである。

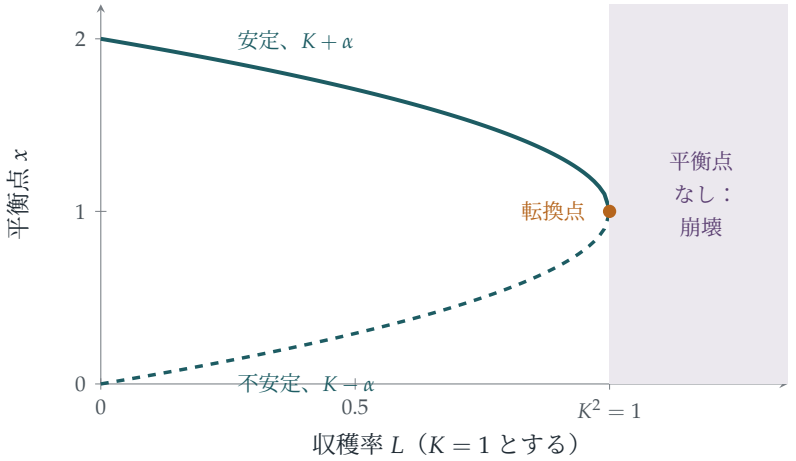

図 8.3.1　収穫率 L に対する平衡個体数（$K=1$）。安定な平衡点（実線）と不安定な閾値（破線）は L が増加するにつれて互いに近づき、$L=K^2$ で出会う。それを超えると平衡点は存在せず、個体群はその大きさにかかわらず崩壊する。

最大持続生産量

個体群が持ちこたえられる最大の収穫はどれだけだろうか。それは $L=K^2$、すなわち増加率 $(2K-x)x$ の最大値であり、個体数を環境収容力の半分である K に保つときに達成される。水産科学は 20 世紀半ばに、この「最大持続生産量」（maximum sustainable yield）を資源管理の目標として採用した。しかし、ちょうど最大値で収穫するということは、系をちょうど転換点に置くということであり、そこでは K をほんのわずか過大に見積もったり、不漁の年が一度あったりするだけで崩壊が起こる。ニューファンドランド（Newfoundland）沖のグランドバンクス（Grand Banks）のタラ漁場は、500 年にわたって世界有数の豊かな漁場であったが、1990 年代初めに崩壊した。1992 年、カナダ政府は禁漁措置を導入し、数万人が職を失った。資源は今なお完全には回復していない。

他の場面でのロジスティック成長

ロジスティック方程式は、1838 年にフェルフルスト（Pierre-François Verhulst）が人口のモデルとして提案したものである。同じ S 字形の曲線は、感染症の初期段階での広がり、新技術の普及、自己触媒的な化学反応、腫瘍の成長などを記述する。その離散時間版であるロジスティック**写像**（logistic map）はまったく異なる振る舞いを示し、カオス的（chaotic）になりうる。これについては Section 8.7 で見ることにする。

次の一歩

1. **低い値から出発する。**収穫があり $K^2 > L$ のとき、$x(0) < K - \alpha$ ならば個体数は有限時間でゼロに達することを示せ。（**ヒント**：$y(0) < 0$ のとき y はどう振る舞うか。）

2. **過剰収穫。**$L > K^2$ のとき、$\beta = \sqrt{L - K^2}$ とおく。$x(0) = 2K$ のもとで $x' = -(x-K)^2 - \beta^2$ を解き、個体数がゼロに達する時刻を求めよ。

3. **比例収穫。**代わりに、個体群の一定の**割合**を取り除くとする：$x' = (2K - x)x - hx$。平衡点を求め、すべての $h < 2K$ に対して個体群が存続することを示せ。この方策はなぜより安全なのか。

4. **到達時刻。**収穫のない場合に、個体数が $\frac{3}{2}K$ に達する時刻を求めよ。

さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形力学とカオス』。第 3 章は分岐を扱っており、この収穫モデルが演習問題として取り上げられている。
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology***（Springer）。『数理生物学の基礎』。学部生向けの個体群モデル。
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World***（Penguin）。『タラ：世界を変えた魚の歴史』。タラ漁業とその崩壊の歴史。

詳しい解説付きの解答は第 8.3 節にある：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/harvesting.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com