8.2 解かずに評価する

ワークシート

問題

STEP III 2013、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/13-s3-q7

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　小問 (i) では、y を粒子の位置、x を時刻と考えよう。すると $y'' = -y^3$ は力 $-y^3$ に対するニュートン（Newton）の運動法則である。運動エネルギーと位置エネルギーは何か。

段階 1 保存（conservation）

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう 連鎖律（chain rule）を用いて E を x で微分し、$2y'$ をくくり出せ。残った括弧の中身について、微分方程式（differential equation）から何がいえるか。

考えてみよう したがって E は定数である。$x = 0$ における値を求めよ。$(y')^2 \geq 0$ であることから、y^4 について何がわかるか。

段階 2　散逸（dissipation）

扱う内容：小問 (ii)

> **手を止めて、やってみよう**　再び E を微分し、方程式を用いて $v'' + \sinh v$ を置き換えよ。$x \geq 0$ のとき $\dfrac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}$ の符号はどうなるか。$\mathrm{E}(x)$ と $\mathrm{E}(0)$ を比較し、$\cosh(\ln 3)$ を計算せよ。

段階 3 エネルギー（energy）を作り出す

扱う内容：小問 (iii)

> **手を止めて、やってみよう** $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$ とおいてみよ。これを微分し、方程式で w'' を置き換えたときに $(w')^2$ の定数倍だけが残るように $F'(w)$ を選べ。導関数（derivative）が $w\cosh w$ となる関数が必要になる。$w\sinh w$ を微分してみよ。

> **考えてみよう** $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$ を示すには、これを e^{x} と e^{-x} で表し、完全平方（perfect square）の形を探せ。そのうえで $\mathrm{E}(x)$ と $\mathrm{E}(0)$ を比較せよ。$w\sinh w$ の符号はどうなるか。

背後にある数学

リャプノフ関数

1892 年の博士論文において、リャプノフは運動の**安定性**（stability）を研究した。系が平衡点（equilibrium）からわずかに乱されたとき、もとに戻るのか、それとも離れていってしまうのか。彼の「第二の方法」は、平衡点で最小となり、解に沿って

決して増加しない関数を見つけることであった。この関数は現在**リャプノフ関数**（Lyapunov function）とよばれている。そのような関数があれば、平衡点の近くから出発した解は平衡点の近くにとどまる。この方法の美しさは、解の公式を必要とせず、微分方程式そのものだけを用いる点にあり、それこそがこの問題が示していることである。リャプノフ関数は今日、航空機の制御システムから電力網、生態系に至るまで、あらゆるものの安定性を証明するのに使われている。

物理学と工学におけるエネルギー

小問 (i) は非線形振動子（nonlinear oscillator）である。ばねに似ているが、復元力が変位の 3 乗に比例する。単振動（simple harmonic oscillator）とは異なり、その周期は振幅に依存する（振動が大きいほど速い）が、それでもエネルギー保存によって閉じ込められている。小問 (ii) では時間とともに大きくなる減衰が加わり、エネルギーが失われていく。工学では、エネルギーを用いる方法によって、構造物が自らの揺れで壊れないことや、制御システムが制御不能な振動を起こさないことが示される。偏微分方程式（partial differential equation）の理論では、この種の「エネルギー評価」（energy estimates）が、解が存在して良い振る舞いをすることを証明するための主要な道具である。流体の流れの方程式に関する問題は、ミレニアム懸賞問題（Millennium Prize Problems）の一つ（ナビエ–ストークス問題（Navier–Stokes problem））も含めて、このような評価が得られるかどうかに帰着する。

次の一歩

1. **単振動。** $y(0) = A$、$y'(0) = 0$ のもとでの $y'' + y = 0$ について、保存されるエネルギーを求め、$|y| \le A$ を導け。厳密解と照らし合わせて確かめよ。

2. **振り子。** 振り子（pendulum）の角度 θ は（適当な単位のもとで）$\theta'' + \sin\theta = 0$ を満たす。$(\theta')^2 - 2\cos\theta$ が一定であることを示せ。振り子が角度 θ_0（ただし $|\theta_0| \le \pi$）で静止した状態から動き始めるとき、$|\theta|$ が決して $|\theta_0|$ を超えないことを示せ。$|\theta_0| > \pi$ のときは何がうまくいかなくなるか。

3. **減衰。** $k > 0$ として $y'' + 2ky' + y = 0$ について、$(y')^2 + y^2$ が減少することを示せ。これは必ず 0 に収束するか。

4. **脱出。** $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$ のもとでの $y'' - y^3 = 0$ について、保存量を求め、それによって y が有界であるとはいえないことを示せ。何がうまくいかないのか。

さらに学ぶために

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。『非線形ダイナミクスとカオス』。第 6 章と第 7 章で、相平面（phase plane）、保存系、リャプノフ関数を扱っている。
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations***（Oxford University Press）。『非線形常微分方程式』。エネルギーを用いる方法の例を数多く含む、学部向けの定番教科書である。
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems***（Basic Books）。『ミレニアム問題』。ナビエ–ストークス問題についての親しみやすい解説を含む。

詳しい解説付きの解答は第 8.2 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/bounding-without-solving.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com