8.1 解が一意でないとき

ワークシート

問題

STEP III 1994、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

? **考えてみよう**　両辺の平方根をとると $y' = \pm 2\sqrt{y}$ となる。$y = (x-c)^2$ を試してみよう。これは方程式を満たすか。もっと簡単な解はないだろうか。

段階 1　1 点を通る解

扱う内容：点 (a, b^2) を通る 2 つの解

? **考えてみよう**　点 (a, b^2) を通る放物線（parabola）$y = (x-c)^2$ はどれか。c について解け。2 つの答えが異なるのはなぜか。

段階 2　2 つの点と共通の解

扱う内容：点 $(a_1, 1)$ と点 $(a_2, 1)$

考えてみよう　原点を通る解はどれか。その解が高さ 1 に達するのはどこか。それによって a_1 と a_2 が得られる。各点を通る 2 つの解を書き出し、どれが共通しているかを調べよ。

段階 3　解の族（family）全体と共通接線

扱う内容：最後の小問：共通接線（common tangent）

手を止めて、やってみよう　放物線 $y = (x - c)^2$ をいくつか描いてみよ。そのすべてに接する直線はどれか。その直線自体はこの方程式の解になっているか。

段階 4　なぜ重要なのか

扱う内容：最後の小問：接線が関係する理由

> **考えてみよう**　x 軸上の点を通る解はどれか。しばらく x 軸に沿って進み、その後放物線に沿って x 軸から離れていく解を作れるか。つなぎ目で微分可能（differentiable）になっているか。

背後にある数学

解はいつ一意か

ピカール–リンデレーフの定理（1890–1894 年ごろにピカール（Émile Picard）とリンデレーフ（Ernst Lindelöf）が証明した）によれば、F が y について**リプシッツ連続**（Lipschitz）であるとき、すなわち $|F(x,y_1)-F(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$ を満たす定数 L が存在するとき、方程式 $y'=F(x,y)$ は $y(x_0)=y_0$ のもとで x_0 の近くにただ一つの解をもつ。おおまかに言えば、y が変化するとき F が無限に速く変化してはならないということである。我々の方程式は $y'=\pm 2\sqrt{y}$ であり、$\sqrt{y}$ は $y=0$ で傾きが無限大になる。そこではリプシッツ連続ではなく、まさにそこで一意性が破れるのである。（ペアノ（Giuseppe Peano）は 1886 年に、F が連続であるだけで解の**存在**（existence）は保証されるが、一意性は保証されないことを示した。）ピカール–リンデレーフの定理の証明では、Section 2.2 の縮小写像の原理（contraction mapping principle）によって収束する反復法を用いる。

水漏れするバケツ

物理的な例を挙げよう。底に穴のあいたバケツは、トリチェリ（Torricelli）の法則に従って空になる。水の高さ h は $h'=-k\sqrt{h}$ を満たす。時間を順方向に進める限り、何も問題はない。バケツは空になり、空のままである。しかし時間を逆向きにたどって

みよう。空のバケツを見つけても、方程式からはそれがいつ空になったのかがわからない。常に $h = 0$ である解も、ある時刻まで満杯で、その後水が抜けた解も、すべて「今は空である」ことと矛盾しない。一意性の破れは、過去についての情報が失われたという事実の数学的な影なのである。

ノートンのドーム

2003 年、哲学者 John Norton は、摩擦のないドームで、その頂上にぴったり置かれた球がニュートンの法則に従って $r'' = \sqrt{r}$ という形の方程式を満たすような形状のものを考えた。一つの解は、球が永遠に頂上にとどまるというものである。しかし別の解もあり、それらでは球が任意の時間だけ頂上にとどまった後、何の原因もなく自発的に任意の方向へ転がり落ちる。この例は今も議論が続いている。古典力学は本当に決定論的（deterministic）なのだろうか。数学的には、これはまさにこの問題と同じ種類の一意性の破れである。

次の一歩

1 **二つの増加率。** STEP II 2018、問 8（step.maths.org/questions/18-s2-q8）に取り組んでみよう。この問題では、二つの成長方程式を置換によって解く。そのうえで、なぜ $y = 0$ も同じ初期値をもつ解なのか、そしてそれが一意性について何を意味するのかを考えてみよう。

2 **水漏れするバケツ。** $h(0) = h_0 > 0$ のもとで $h' = -k\sqrt{h}$ を解け。バケツが空になるのはいつか。ある T について $h(T) = 0$ であり、すべての $t \geq T$ について $h(t) = 0$ となる、異なる二つの解を書け。

3 **一意性の回復。** $y(0) = 0$ のもとで $y' = 2y$ の解は $y = 0$ のみであることを示せ。（ヒント：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$ を考えよ。）$2\sqrt{y}$ にはなくて $2y$ にはある性質は何か。

4 **3 乗。** 原点を通る $y' = 3y^{2/3}$ の解をすべて求めよ。

さらに学ぶために

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos***（Academic Press）。存在と一意性、そしてこの章の内容の多くを扱っている。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。歴史的な話題に富んだ古典的名著。特異解と包絡線を論じている。

- **John Norton,「The dome: an unexpectedly simple failure of determinism」**, *Philosophy of Science* 75 (2008)。短く読みやすい。

詳しい解説付きの解答は第 8.1 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/non-uniqueness.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com