7.9 正多面体はただ五つ

ワークシート

問題

STEP III 1999、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/99-s3-q4

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　立方体でオイラーの公式を確かめよ。頂点（vertex）、辺（edge）、面（face）はそれぞれいくつあるか。正方形を底面とする角錐ではどうか。

考えてみよう　正多面体では、各面は m 本の辺をもち、各辺はちょうど 2 枚の面に接する。このことから E と F の間にどのような等式が得られるか。同様に、E と V の間にはどうか。

段階 1　F を表す式

扱う内容：F を表す式を導く

考えてみよう　$mF = 2E$ と $nV = 2E$ を用いて、E と V を F で表せ。それをオイラー（Euler）の公式（Euler's formula）に代入し、F について解け。

考えてみよう　$4 - (n-2)(m-2)$ を展開し、自分の求めた分母（denominator）と比べてみよ。

段階 2　m と n はどのような値をとりうるか？

扱う内容：五つしかないことを示す

考えてみよう　m のとりうる最小の値はいくつか。n についてはどうか。$F > 0$ であるから、h の符号はどうでなければならないか。

手を止めて、やってみよう　両方の因数が 1 以上で、$(n-2)(m-2) < 4$ となる必要がある。考えられる場合をすべて書き出せ。それぞれについて h、F、E、V を求め、その立体の名前を答えよ。

背後にある数学

オイラーの公式と位相幾何学

オイラーは 1750 年に $V - E + F = 2$ を述べたが、その証明には不備があった。この公式には、証明の試み、反例（counterexample）、そしてその修正が繰り返された興味深い歴史がある。中央に正方形の穴が貫通した「額縁」型の多面体では $V - E + F = 0$ となり、2 つの立方体を 1 つの頂点で接合した多面体では $V - E + F = 3$ となる。ラカトシュ・イムレ（Imre Lakatos）はこの歴史を題材に、数学の概念が反例によって

どのように研ぎ澄まされていくかを論じた有名な書物 *Proofs and Refutations*（『証明と論駁』）を著した。最終的な解決は、$V - E + F$ が位相幾何学（topology）というゆるやかな意味での曲面の**形**にのみ依存する、というものである。すなわち、球面に変形できる任意の曲面ではこの値は 2 であり、トーラス（torus、ドーナツの表面）では 0、g 個の穴をもつ曲面では $2 - 2g$ である。この数は**オイラー標数**（Euler characteristic）と呼ばれ、伸ばしたり曲げたりしても変わらない性質を研究する位相幾何学の、最初期の概念の一つであった。

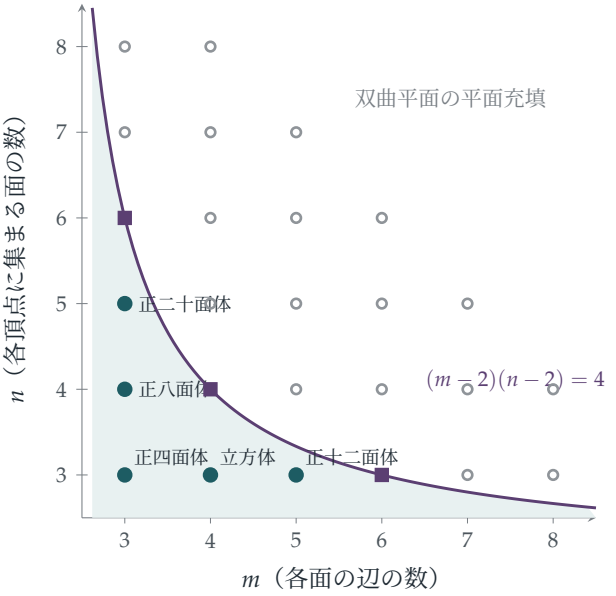

図 7.9.1　$m, n \geq 3$ を満たす組 (m, n) としてありうるもの。曲線 $(m-2)(n-2) = 4$ の下側（網掛け部分）にあるのが 5 つのプラトン立体（緑青色）である。曲線上にあるのは平坦な平面の 3 つの平面充填（紫の四角）であり、それぞれ正三角形（$m = 3$、$n = 6$）、正方形（4, 4）、正六角形（6, 3）によるものである。曲線より上側の各点（白抜きの丸）は、双曲平面の正則な平面充填を与える。

球面の先へ

$h = 0$ や $h < 0$ のときはどうなるだろうか。$(m-2)(n-2) = 4$ のときは $(3, 6)$、$(4, 4)$、$(6, 3)$ の 3 つの解がある。すなわち、6 枚の正三角形、4 枚の正方形、あるいは 3 枚の正六角形が 1 点に集まり、その角の和がちょうど 360° になる。これらは平坦な平面の 3 つの正則な平面充填（tiling）であり、浴室の床のタイルや蜂の巣に見られる模様である。そして $(m-2)(n-2) > 4$ のときは、1 つの頂点に集まる角の和が 360° を**超**

える。これは平坦な平面では不可能だが、Section 5.8 で扱った双曲平面（hyperbolic plane）ではまったく問題なく実現できる。双曲平面の正則な平面充填は無限に多く存在し、図 7.9.1 の曲線より上側の各点に 1 つずつ対応する。エッシャー（Escher）の木版画 *Circle Limit*（『円の極限』）連作は、そのうちのいくつかを描いたものである。このように、プラトン立体の分類は、実は幾何学全体を貫く三分法（trichotomy）——球面、平面、双曲平面——の最初の場合なのである。

対称性の群

プラトン立体の対称性は群（group）をなす。正四面体では 12 個の回転、立方体と正八面体では 24 個の回転（この 2 つは双対（dual）である。つまり面と頂点を入れ替える、$m \leftrightarrow n$）、正十二面体と正二十面体では 60 個の回転である。位数 60 の正二十面体群は、Section 6.4 で触れたように、五次方程式（quintic）が冪根（radicals）によって解けないことの原因となる「単純」群（simple group）である。フェリックス・クライン（Felix Klein）は、正二十面体と五次方程式の解法とを結びつける一冊の本 *Lectures on the Icosahedron*（『正二十面体講義』、1884 年）を著している。

次の一歩

1. **双対性。** m と n を入れ替えると、V と F が入れ替わり、E は変わらないことを示せ。どのプラトン立体どうしが互いに双対か。自己双対なのはどれか。

2. **サッカーボール。** 伝統的なサッカーボールは 12 枚の正五角形と 20 枚の正六角形からなり、各頂点には 3 枚の面が集まる。二重数え上げとオイラーの公式を用いて、$V - E + F = 2$ を確かめよ。さらに一般に、五角形と六角形からなり各頂点に 3 枚ずつ集まるこのような多面体は、ちょうど 12 枚の五角形をもつことを示せ。

3. **トーラス。**「額縁」型の多面体（正方形の穴があいた四角いブロック）を作り、V、E、F を数えよ。$V - E + F = 0$ となることを確かめよ。

4. **頂点に集まる角。** 正 m 角形の内角は $180^\circ\left(1 - \frac{2}{m}\right)$ である。凸な立体の 1 つの頂点のまわりにそれが n 個収まる（和が 360° 未満となる）のは、$(m-2)(n-2) < 4$ のとき、かつそのときに限ることを示せ。これにより分類の第二の証明が得られる。

さらに学ぶために

- **David Richeson, *Euler's Gem*** （Princeton University Press）。$V - E + F = 2$ の歴史と、それがどのように位相幾何学へとつながったかを描く。シックスフォーム（sixth form、英国の大学進学準備課程）の生徒にとって最適な一冊である。

- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。オイラーの公式と証明の本質をめぐる対話篇。
- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes***（Dover）。正多面体とその高次元の仲間についての古典的名著。

詳しい解説付きの解答は第 7.9 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/platonic-solids.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com