7.7 決して変わらない量

ワークシート

問題

STEP III 2024、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2024 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう　式 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ は $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ の**交換子**（commutator）と呼ばれる。これが零になるのはどのようなときか。小問 (i) を踏まえると、そのトレースはいくらか。

段階 1　トレース

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおき、$\mathbf{MN}$ と $\mathbf{NM}$ の対角成分（diagonal entries）だけを計算せよ。

段階 2 行列式の導関数

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう $ad - bc$ を積の微分法則（product rule）で微分せよ。次に、2×2 行列の逆行列（inverse）の公式を用いて、$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ の対角成分を計算せよ。

段階 3　3 つの保存量

扱う内容：小問 (iii)、3 つの定数

考えてみよう　トレース（trace）については、微分方程式（differential equation）の両辺のトレースをとり、小問 (i) を用いよ。

手を止めて、やってみよう　行列式（determinant）については、方程式の左から $\mathbf{M}^{-1}$ を掛け、小問 (ii) を用いよ。$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ が必要になるが、これはなぜ成り立つか。$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{2})$ については、$\operatorname{tr}\mathbf{M}$ と $\det\mathbf{M}$ を用いて表せ。

段階 4 陽な解

扱う内容：小問 (iii)、$\mathbf{M}$ を求める

考えてみよう $\mathbf{N}$ を $t\mathbf{I}$ と $t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ の和に分けよ。$t\mathbf{I}$ の部分は $\mathbf{M}$ と可換（commute）なので、$\mathbf{MN}-\mathbf{NM}$ からは消える。

手を止めて、やってみよう a、b、c、d についての 4 つの微分方程式を書き下せ。まず c を求め、次に a と d、最後に b を求めよ。得られた解のトレースと行列式が一定であることを確かめよ。

段階 5　異なる方程式

扱う内容：小問 (iv)

> **手を止めて、やってみよう**　$\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ ならば $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ であり、小問 (ii) により $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ は $\det\mathbf{M}$ の変化の仕方と結びつく。$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ のように、トレースは一定のまま行列式が変化する $\mathbf{M}$ を探せ。

背後にある数学

ソリトンとラックス対

1834 年、スコットランドの技術者 John Scott Russell は、エディンバラ近郊のユニオン運河を進む孤立波を馬で追いかけ、それが 1 マイル以上にわたって形を崩さずに進むのを観察した。このような波は**コルテヴェーク–ド・フリース（*KdV*）方程式**（Korteweg–de Vries equation）で記述される。1960 年代には、Norman Zabusky と Martin Kruskal による計算機実験によって、この「ソリトン」二つが衝突しても、まるで粒子のように形を変えずに抜け出てくることが示された。これを説明するには無限に多くの保存量が必要であった。1968 年にピーター・ラックスは、KdV 方程式が一対の微分作用素 L と P を用いて $\dot{L} = LP - PL$ と書けることを示した。すると、まさにこの問題と同じように L の固有値が保存され、それらが無限個の保存則を与える。ラックス対をもつ系は**可積分**（integrable）と呼ばれ、厳密に解くことのできる数少ない非線形系の一つである。

等スペクトル流

$\mathbf{M}$ のトレースと行列式は特性多項式（characteristic polynomial）$\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$ を決定するから、$\mathbf{M}$ の固有値は時間とともに変化しない。流れ $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$ は、固有

値を固定した行列の集合の中で $\mathbf{M}$ を動かしていく。実際、解は常にある正則行列 $\mathbf{S}(t)$ を用いて $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$ の形に書ける。すなわち、行列は常に初期値と相似（similar）である。同じ考え方は物理学全体に通じている。量子力学では、観測量 $\mathbf{A}$ は $\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$ に従って時間発展する。ここで $\mathbf{H}$ はエネルギーであり、したがってエネルギーと可換なものはすべて保存される。

ヤコビの公式

小問 (ii) は任意のサイズの正則行列に対して成り立ち、**ヤコビ（*Jacobi*）の公式**と呼ばれる。$\det \mathbf{M}$ は負になりうるので、対数を使わずに $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{M} = \det\mathbf{M}\,\operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ と書くのが最も安全である。対数を用いた形 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ には $\det\mathbf{M} > 0$ が必要である（一般には $\ln|\det\mathbf{M}|$ を用いる）。この帰結として、定数行列 $\mathbf{A}$ に対して $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$ ならば、$\det\mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det\mathbf{M}(0)$ となる。微分方程式の研究では、これは相空間（phase space）における体積がどのように増減するかを教えてくれる。古典力学の方程式ではトレースが零であり、体積は保存される。これは**リウヴィルの定理**（Liouville's theorem）として知られる結果である。

次の一歩

1. **解を確かめる。** 段階 4 の行列 $\mathbf{M}(t)$ が $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ を満たすことを、微分して確かめよ。

2. **相似。** $\mathbf{M}_0$ を定数行列とし、$\mathbf{S}(t)$ が $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$ を満たすとき、$\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$ ならば $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ であることを示せ。（ヒント：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$。）

3. **体積の増大。** $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ とする。$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ となる $\mathbf{N}$ を求め、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\det\mathbf{M} = \operatorname{tr}\mathbf{N}$ を確かめよ。

4. **高次の累乗。** $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ のとき、任意の正の整数 k に対して $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$ であることを直接示せ。

さらに学ぶために

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction***（Cambridge University Press）。ラックス対も含む、学部生向けの標準的な入門書。
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons***（Cambridge University Press）。Scott Russell の波の話も収められている。

- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。対称性がどのように保存則を与えるかを解説している。

詳しい解説付きの解答は第 7.7 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/lax-pairs.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com