# 7.6 双曲的回転と相対性理論

ワークシート

**問題**

**STEP III 1991、問 6**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s3-q6

## ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

**考えてみよう**　$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ に相当する、$\cosh u$ と $\sinh u$ が満たす恒等式は何か。また、$\cosh(u+v)$ と $\sinh(u+v)$ の加法定理はどうなるか。

### 段階 1 双曲線は不変（invariant）である

扱う内容：双曲線（hyperbola）と、自分自身に写される原点を通る直線

**考えてみよう** $x'^2 - y'^2$ を展開せよ。交差項（cross terms）は打ち消し合う。最後の仕上げに使う恒等式（identity）は何か。

**手を止めて、やってみよう** 原点を通る直線が自分自身に写されるのは、その方向が固有ベクトル（eigenvector）であるときである。方向 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を試してみよ。

### 段階 2　双曲角（hyperbolic angle）を足す

扱う内容：傾き（gradient）、$v' = v + u$

> **考えてみよう**　傾きが $\tanh v$ の直線は方向 $(\cosh v, \sinh v)$ をもつ。この方向に $T$ を施し、加法定理（addition formulas）を用いよ。直線が原点を通るかどうかが問題にならないのはなぜか。

### 段階 3 角が保たれるのはどのようなときか

扱う内容：角が等しくなるための条件

**考えてみよう** $m_i = \tanh v_i$ として $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ を用い、分子と分母に $\cosh v_1 \cosh v_2$ を掛けよ。

**手を止めて、やってみよう** 分子に $\sinh(v_1 - v_2)$、分母に $\cosh(v_1 + v_2)$ が現れるはずである。このうち $T$ によって変化するのはどちらか。$\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$ となるのはどのようなときか。

### 段階 4　図で見る

扱う内容：原点で交わる直線

> **考えてみよう**　$v_1 + v_2 = -u$ のとき、$v_1'$ と $v_2'$ はどうなるか。新しい直線を、元の直線の $x$ 軸に関する鏡映（reflection）と比較せよ。

## 背後にある数学

#### 特殊相対性理論

アインシュタインの特殊相対性理論（1905 年）では、互いに一定の速度で運動する観測者たちは時間と距離について意見が一致しないが、量 $t^2 - x^2$（光の速さを $c = 1$ とする）については全員が一致する。これが**時空間隔**（spacetime interval）である。これを保つ変換が**ローレンツ変換**（Lorentz transformation）であり、空間が一次元の場合、それはちょうどこの問題の行列で、$x$ を時間、$y$ を距離としたものになる。速度 $v = \tanh u$ で運動する観測者は、この行列によって我々の座標と結びつく座標を用いる。ここで $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ は、時間の遅れ（time dilation）を表す有名な因子 $\gamma$ である。ミンコフスキー（Minkowski）は 1908 年に、これによって時空が、マイナス符号を含む「距離」をもつ四次元の幾何学になることを見抜いた。「これより先、空間それ自体、そして時間それ自体は、単なる影へと消え去る運命にある。」

### この問題の物理的な意味

- **不変な直線** $y = \pm x$ は光線の経路である。これはすべての観測者にとって同じである。光の速さが誰にとっても同じであるということこそ、相対性理論の根本原理である。
- **双曲線** $x^2 - y^2 = 1$ は、あらゆる一定速度で運動する観測者が測ったときに、原点から「固有時」（proper time）で一単位離れた事象の集合である。

- **ラピディティの加法。** 原点を通る傾き $\tanh v$ の直線は、速度 $\tanh v$ で運動する物体の経路である。ラピディティ $u$ のブーストは、その速度を $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1+\tanh v \tanh u}$ に変える。これは Section 3.8 で見たアインシュタインの速度合成の公式である。速度は加法的ではないが、ラピディティは加法的なのである。

さらに Section 5.8 では、同じ加法公式をポアンカレ円板（Poincaré disc）における距離の規則として見た。相対性理論において可能な速度全体の集合は、ラピディティで測ると双曲空間になるのである。

## 次の一歩

1. **ブーストの合成。** $T(u)$ を問題の行列とするとき、$T(u)T(w) = T(u+w)$ を示せ。$T(u)^{-1}$ は何か。

2. **時間の遅れ。** 宇宙船が光の速さの 0.8 倍で進んでいる。そのラピディティ $u$ と $\cosh u$ を求めよ。地球で 10 年が経過するとき、宇宙船ではどれだけの時間が経過するか。（$t_{\text{宇宙船}} = t_{\text{地球}} / \cosh u$ を用いよ。）

3. **双曲線の面積。** 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$、$x$ 軸、および原点と $(\cosh v, \sinh v)$ を結ぶ線分で囲まれた部分の面積が $\frac{v}{2}$ であることを示せ。これは円の場合の対応する面積が $\frac{\theta}{2}$ であることとちょうど同じである。$T$ がこのような面積を保たなければならないのはなぜか。

4. **スクイーズ。** 座標を $p = x + y, q = x - y$ に変換せよ。$T$ が $p \mapsto e^u p, q \mapsto e^{-u} q$ となり、双曲線が $pq = 1$ となることを示せ。この座標で、変換を幾何学的に説明せよ。

## さらに学ぶために

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics*** (W. H. Freeman)。ラピディティと時空図を用いた特殊相対性理論の本で、A レベル（A level、英国の大学入学資格試験）の数学を学んだ生徒向けである。

- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity*** (CRC Press)。相対性理論を双曲線の三角法として扱っており、まさにこの節と同じ精神で書かれている。

- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（さまざまな版がある）。アインシュタイン自身による一般向けの解説で、今でも非常に読みやすい。

詳しい解説付きの解答は第 7.6 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/hyperbolic-rotations.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com