7.5 三次元の回転

ワークシート

問題

STEP III 2022、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

ヒント

まずは自力で問題に取り組んでみよう。行き詰まったら、ヒントを**一つずつ**読み、そのたびに問題に戻ること。**手を止めて、やってみよう**と記したヒントが重要な段階である。各ヒントの後には計算用の余白がある。

考えてみよう $\mathbf{r}$ が $\mathbf{n}$ に垂直なとき、$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は幾何学的にどのように見えるか。$\mathbf{r}$ が $\mathbf{n}$ に平行なときはどうか。

段階 1　2 回外積をとる

扱う内容：小問 (i)

考えてみよう　$\mathbf{n} = (a, b, c)$、$\mathbf{r} = (x, y, z)$ とおく。まず外積（cross product）$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ を計算し、さらにもう一度 $\mathbf{n}$ との外積をとって、その x 成分（component）を調べよ。

手を止めて、やってみよう　$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を用いて $b^2 + c^2$ を置き換えよ。残った式の中に $\mathbf{n}.\mathbf{r}$ が見えるだろうか。

段階 2　回転

扱う内容：小問 (ii)

考えてみよう　$\mathrm{g}(\mathbf{n})$ は何か。$\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$ であることを思い出そう。

手を止めて、やってみよう　次に、$\mathbf{n}$ に垂直（perpendicular）な $\mathbf{r}$ をとる。小問 (i) より $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$ である。$\mathrm{g}(\mathbf{r})$ を簡単にせよ。$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ と比べてどのようなベクトルか。

段階 3 鏡映

扱う内容：小問 (iii)

> **手を止めて、やってみよう** 小問 (i) を用いて h を簡単にせよ。h は **n** をどこに移すか。また、**n** に垂直なベクトルをどこに移すか。

背後にある数学

オイラーの回転定理

原点を固定する 3 次元空間の回転はすべて、原点を通るある軸のまわりの回転である。これはオイラー（Euler）が 1775 年に証明した。行列の言葉でいえば、3×3 の回転行列はすべて固有値（eigenvalue）1 の固有ベクトル（eigenvector）をもち、それが軸である。ロドリゲスの公式はその逆を与える。すなわち、任意の軸 $\mathbf{n}$ と角 θ に対して、回転行列は

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

で与えられる。ここで $\mathbf{K}$ は $\mathbf{r}\mapsto \mathbf{n}\times\mathbf{r}$ の行列である。$\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$ であるから、指数級数（exponential series）$e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$ はちょうどこの公式にまとまる。これは $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ の 3 次元版である。回転と「無限小回転」$\mathbf{K}$ の指数関数とのこの結びつきが、**リー群**（Lie groups）の理論の出発点である。

回転は可換ではない

本を水平に持ち、鉛直な軸のまわりに 90° 回転させてから、水平な軸のまわりに 90° 回転させてみよう。次に最初からやり直し、2 つの回転を逆の順序で行う。本は異な

る位置に落ち着く。2 次元とは異なり、3 次元における回転の合成（composition）は可換ではない。これが Section 6.7 の四元数（quaternions）が役に立つ理由の 1 つである。$\mathbf{n}$ のまわりの角 θ の回転は四元数 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$ に対応し、回転の合成は四元数の積になり、非可換性がはじめから組み込まれている。ロドリゲス自身は 1840 年の論文で、ハミルトン（Hamilton）が四元数を考案する 3 年前に、回転の合成公式を見いだしていた。

次の一歩

1. **平面の回転。** STEP III 2017、問 2（step.maths.org/questions/17-s3-q2）に挑戦せよ。複素数を用いて、平面の 2 つの回転を合成すると、1 つの例外を除いて回転になることを示す問題である。その例外を見つけ、そのとき合成が何になるかを求めよ。

2. **具体的な回転。** 方向 $(1, 1, 1)$ の軸のまわりの 120° 回転の行列を求めよ。それが座標軸を巡回的に入れ替えることを示せ。

3. **$\mathbf{K}$ のべき。** $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ および $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$ を示し、指数級数からロドリゲスの公式を導け。

4. **2 回の鏡映で回転になる。** 原点を通り、互いに角 α をなす 2 つの平面に関して順に鏡映を行うと、それらの交線のまわりの角 2α の回転になることを示せ。

さらに学ぶために

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups***（Dover）。3 次元の回転についての決定版で、ロドリゲスの貢献も扱っている。
- **Simon Altmann,「Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal」**, *Mathematics Magazine* 62 (1989)。短く生き生きとした歴史の読み物。
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory***（Springer）。学部生向けに回転、四元数、リー群を解説している。

詳しい解説付きの解答は第 7.5 節にある：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/rotations-3d.html

毎週 1 問の STEP の問題を丁寧に解き明かす The STEP Up。メールで無料配信中：keithmcnulty.substack.com